ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802465406364

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Фамилия ХУСАИНОВА

Имя АЛИНА

Отчество ИЛЬДАРОВНА

Дата рождения 29 01 2006

Город участия Тюмень

Аудитория 317

Телефон 89829430614

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802465406364

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Город участия Тюмень

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	20	0					
Балл члена жюри №2	20	20	0	20	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

задание 1. a_i - наиб. слагаемое

если $a_i = \overline{2xx2}$, то сумма остальных слагаемых равна $2021 - 2002 = 19$ (т.к $2112 > 2021$). Каждое число > 10, значит 19 должно быть палиндромом, что неверно. $a_i > 3000$ невозможно. ✓

если $a_i < 1000$, то студент получит минимум 3 задачи т.к $1000 \cdot 2 < 2021$ ✓

если ~~а~~ $2000 > a_i \geq 1000$, то $a_i = \overline{1xx1} = 1001 + 110 \cdot x$

Тогда $(2021 - a_i) \vdots 10 \Rightarrow$ заканчивается на 0, т.е кроме a_i не может быть только 1 число, ведь палиндром не может заканчиваться на 0

Значит будет мин. 3 числа   оценка

Понимаем, что меньше 3 задач не получить.

Пример на 3: $1001 + 606 + 414 = 2021$ пример

- все 3 слагаемых палиндромы

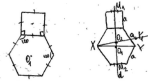
+

Ответ: 3.

задание 2.

да, существует.

Пример:



+

видим на рисунке 8-угольник. его можно разрезать на квадрат и правильный 6-угольник (строится он так: берется правильный шестиугольник со стороной a и на одной из его сторон строится квадрат со стороной a). Заметим, что центры симметрии квадрата и шестиугольника это центры их вписанных и описанных окружностей. Они, очевидно, существуют т.к. фигуры правильные. При этом у 8-угольника нет центра симметрии т.к если бы он был, он бы находился на прямой d (ось симметрии) и на середине M_1M_2 (пусть это O_2). Тогда O_2 ближе к M_1 чем O_1 т.к $O_1M_2 < O_2M_2$. Y симметрично X относительно O_1, но если O_2 - центр симметрии, то должна быть точка Y_1 симметричная X относительно O_2, но Y_1 не лежит на восьмиугольнике - противоречие $\Rightarrow$ центра симметрии нет. пример подходит задание 4.

$m + \sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023$

$n + \sqrt{k} = (2023-m)^2 < 2023^2$

$1 \le \sqrt{k} < 2023^2 - 1$, значит для $\sqrt{k}$ $2023^2 - 2$ варианта, соответственно для k столько же.

$\sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023 - m < 2023$

Если $\sqrt{n+\sqrt{k}} = a$, то для a ~~2022~~ $2 \le a \le 2022$ (2021 вариант)

$2^2 \le n + \sqrt{k} \le 2022^2$

- $n + \sqrt{k} = 2^2$ $\quad \sqrt{k} = 1$, ~~$n=3$~~ $\sqrt{k} = 2$ или $\sqrt{k} = 3$ $\quad$ - $\quad 2^2 - 1$ вариант
- $n + \sqrt{k} = 3^2$ $\quad 1 \le \sqrt{k} < 3^2$ $\quad 3^2 - 1$ вариант
- $n + \sqrt{k} = x^2$ $\quad 1 \le \sqrt{k} < x^2$, $\quad n = x^2 - \sqrt{k}$ $\quad x^2 - 1$ вариант

...

- $n + \sqrt{k} = 2022^2$ $\quad 1 \le \sqrt{k} < 2022^2$ $\quad 2022^2 - 1$ вариант

~~Все~~ $n + \sqrt{k} = x^2$ т.к заметим берется корень из числа, $\sqrt{x^2} \in N$.

всего пар ~~во~~ $(n; k)$ $x^2 - 1$ (если известно $\sqrt{k}$, то k и n определяется однозначно)

$m = 2023 - x^2$ - определяется однозначно.

Тогда общее кол-во троек $(m; n; k)$ $N =$

$= (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + \ldots + (2022^2 - 1)$

заметим, что $1^2 + 2^2 + \ldots + a^2 = \frac{a(a+1)(2a+1)}{6}$

Тогда $N = \frac{2022 \cdot (2022+1)(2022 \cdot 2 + 1)}{6} - 1^2 - 2021 = 2023 \cdot \frac{2022}{6} \cdot 4045 - 2022 =$

$= 681751 \cdot 4045 - 2022 = 2757682795 - 2022 = 2757680773$

Ответ: 2757680773.

+

задание 3

Пусть $a+b+c+d=k$. Можем поделить каждое из чисел на k. Тогда если a^2, b^2, c^2, d^2 – арифм. прогрессия, то и $\frac{a^2}{k^2}; \frac{b^2}{k^2}; \frac{c^2}{k^2}; \frac{d^2}{k^2}$ – тоже. Аналогично для второго ряда, ведь знаменатель (например, у $\frac{1}{a+b+c}$) делится на k $\Rightarrow$ разница ~~дроб~~ чисел как была равной, так и остается, св-во арифм. прогрессии не нарушается. Тогда положим $a+b+c+d=1$.

a^2, b^2, c^2, d^2 – ар. прогрессия. Тогда либо $a \le b \le c \le d$, либо $a \ge b \ge c \ge d$.

Случаи аналогичные, пусть $a \le b \le c \le d$.

$\frac{d}{1-d}, \frac{c}{1-c}, \frac{b}{1-b}, \frac{a}{1-a}$ – тоже ар. прогрессия. НЕВЕРНО

$$\frac{b}{1-b} - \frac{d}{1-d} = \frac{a}{1-a} - \frac{c}{1-c}$$

$$\frac{(b-d)}{(1-b)(1-d)} = \frac{(a-c)}{(1-a)(1-c)}.$$ При этом $b^2-d^2 = a^2-c^2$

$(b-d)(b+d) = (a-c)(a+c)$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b-d}{a-c} = \frac{(1-b)(1-d)}{(1-a)(1-c)}$$

~~Заметим также, что сумма 1ого и 3его члена прогрессии~~

После расчетов получим, что $\frac{b-d}{a-c} = \frac{a-c}{b-d}$, т.е $\cancel{b} \frac{(1-b)(1-d)}{(1-a)(1-c)} = \frac{(1-a)(1-c)}{(1-b)(1-d)}$

$(1-a)^2(1-c)^2 = (1-b)^2(1-d)^2$. Но $1-a \ge 1-b$ и $1-c \ge 1-d$,

значит это возможно при $a=b$ и $c=d$.

Тогда $b^2-a^2 = c^2-b^2 = 0 \Rightarrow b=c$. Отсюда $a=b=c=d$, ч.т.д.

задание 5

Ответ: 171

Решение: почему всегда получим минимум 171?

заметим, что всего 9 чисел от 56 до 64.

Если 3 из них окажутся в одной строке/столбце, то $S \geq 56+57+58=171$ – победили.

неверно, для этого нужно 11 чисел

Если такого не будет, то по принципу Дирихле и в столбце, и в строке найдутся 2 нужных числа (от 56 до 64). Тогда ~~S~~ выберем тройку, $S \geq 56+57+58=171$. Значит 171 всегда доступно.

Почему меньше нельзя? Приведем пример расстановки

64	1	3	5	7	9	11	13
2	63	15	17	19	21	23	25
4	16	62	27	29	31	33	35
6	18	28	61	37	39	41	43
8	20	30	38	60	45	47	49
10	22	32	40	46	59	51	53
12	24	34	42	48	52	58	55
14	26	36	44	50	54	56	57

По диагонали числа от 57 до 64.

Заметим, что если мы выбрали 3 числа, то их можно сдвинуть ниже и правее, увеличив сумму (т.к все числа возрастают при движении вниз и вправо)

Значит наиб. сумма возможная – $56+57+58=171$.

⇒ Вася получит гарантированно 171.