ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802252426618

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КАЛТЫГИН

Имя МИХАИЛ

Отчество ДЕНИСОВИЧ

Дата рождения 15 05 2005

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Аудитория 204

Телефон 89040608070

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802252426618

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 11:00 до 11:07

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	0	0					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1.

1. Если $n = 2$:

возможны случаи:

1) $2002 + k = 2021$ (2002 – единственный возможный палиндром > 2000)

$k = 19$ – не палиндром => не подходит +

2) $a + b = 2021$, где $a > 1000$, $a < 2000$, a – палиндром

$a \in \{1001; 1111; 1221; 1331; 1441; 1551; 1661; 1771; 1881; 1991\}$

разряд единиц a равен разряду единиц 2021

=> разряд единиц b должен $= 0$, но таких палиндромов > 10 нет.
=> не подходит +

3) $a + b = 2021$, где $a > 10$, $a < 1000$, a, b – палиндром

Если $a > 10, a < 1000$, то $b > \cancel{1000}\ 1021$, $b < 2010$

Условия для b совпадают со случаями 1), 2) => такого быть не может.

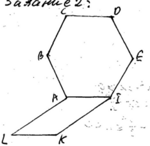
=> $n \neq 2$ + 7б. + 2б.

2. $n = 3$: можно подобрать: $999 + 989 + 33 = 2021$ => n может $= 3$.

3. $n = 1$ => $a_1 = 2021$, но 2021 – не палиндром => $n \neq 1$.

Ответ: 3 задачи, если скажет, что $a_1 = 999$, $a_2 = 989$, $a_3 = 33$ (в любом порядке). +

Задание 2:



ABCDEIKL – многоугольник, не имеющий центра симметрии.

ABCDEI – правильный шестиугольник, симметричен относительно центра вписанной/описанной окружности, выпуклый

AIKL – параллелограм, симметричен относительно точки пересечения диагоналей, выпуклый

Ответ: существует. +

Задание 3.

1. $a \geq b \geq c \geq d$: почему? А если это убывающая прогрессия?

$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2$

$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{a+b+d} \geq \frac{1}{a+c+d} \geq \frac{1}{b+c+d}$

$\cancel{\frac{1}{a+b+d} \geq \frac{1}{a+c+d}}$

$\cancel{\Rightarrow b+d \geq c+d \Rightarrow b \geq c}$

Если $a > b > c > d$, то $a^2 > b^2 > c^2 > d^2$

$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a+b+d} < \frac{1}{a+c+d} < \frac{1}{b+c+d}$

$\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{b+c+d} < 0$

$\frac{b+c+d-a-b-c}{(a+b+c)(b+c+d)} < 0$

$\frac{d-a}{(a+b+c)(b+c+d)} < 0$

$\begin{cases} b^2 = a^2 + k \\ c^2 = a^2 + 2k \quad k<0 \\ d^2 = a^2 + 3k \Rightarrow d = \sqrt{a^2+3k} \end{cases}$

$\sqrt{a^2+3k} - a < 0$

$a > \sqrt{a^2+3k} \quad \uparrow 2$

$a^2 > a^2 + 3k$

$3k < 0$

$\begin{cases} \frac{1}{a+b+d} = \frac{1}{a+b+c} + l \\ \frac{1}{a+c+d} = \frac{1}{a+b+c} + 2l \quad l>0 \\ \frac{1}{b+c+d} = \frac{1}{a+b+c} + 3l \end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt{a^2+k} + \sqrt{a^2+2k} + \sqrt{a^2+3k}} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2+k} + \sqrt{a^2+2k}} + 3l$

$a^2 + 3k \geq 0$

$k \geq -\frac{a^2}{3}$

$-\frac{a^2}{3} \leq k < 0$

$k = -\frac{a^2}{3}$ Почему?

$\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}a + 0} = \frac{1}{a + \frac{\sqrt{6}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}a} + 3l \quad | \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{1}{a(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \frac{1}{a(\frac{1}{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3})} + l \quad | \cdot a$

$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{1 + l(\frac{1}{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3})}{\frac{1}{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3}} \Rightarrow$

Задание 4.

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$

1. $k=1$, $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ - нат. число => $\sqrt{n+1}$ - натур. число, т.к m должно быть натуральным.

$(n+1)$ - должен = квадрату числа, n - натуральное.

$n \in \{3; 8; 15; \ldots; n_l\}$, $n \neq 1$, т.к $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ - не натуральное

$n_l+1=2022^2$

$n_l=4088483$ ✓

Минимальное натуральное число, которое можно получить из $(\sqrt{n+1})$ - 2, а максимальное 2022 (по формуле $n+1$ можно получить квадрат любого числа, n - натуральное)

Всего возможных троек натуральных чисел m, n, k - 2021

m - принимает значения, необходимые для равенства $m+\sqrt{n+1}=2023$. Т.к $\sqrt{n+1}$ и 2023 - натуральные числа, то m тоже будет натуральным.

2. $n=1$ => $\sqrt{1+\sqrt{k}}$ - натуральное число, => $1+\sqrt{k}$ - квадрат числа.

$k \in \{9; 64; 225; \ldots; k_x\}$

$\sqrt{k_x}+1=2022^2$

$\sqrt{k_x}=2022^2-1$ => k_x ~~натурал~~

$k_x=4088483^2$ ✓

т.к. k - любое натуральное число, оно может равняться любому квадрату натурального числа. => $b=\sqrt{k}$ - может принимать значения любого натурального числа, $b \neq 1$ ($\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ - натуральное)

по формуле $b+1$ можно получить квадрат любого числа.

=> можно получить квадраты всех чисе от 2 до 2022

=> можно получить ещё 2021 тройку.

3. $m=1$, ~~$n, k =$~~ $n \neq 1$, $k \neq 1$.

$\sqrt{n+\sqrt{k}}=2022$

$n+\sqrt{k}=2022^2$, ~~$k \in \{4; 9; 16; \ldots$~~;

$n+\sqrt{k}=4088484$, min значение $\sqrt{k}=2$, т.к. $n, 2022^2$ - натуральные числа $\sqrt{k}$ - тоже натуральное

$2 \leq n \leq 4088482$ => таких комбинаций 4088481

=> таких троек 4088481 ✓

Никакие тройки пересекаться не будут, т.к.
1) $k = 1$, $n \neq 1$
2) $k \neq 1$, $n = 1$
3) $k \neq 1$, $n \neq 1$.

Не посчитаны тройки, где
$k \neq 1, n \neq 1, m \neq 1$

Всего троек $= 2021 + 2021 + 4088481 = 4092523$

Ответ: 4092523 троек.

Задание 5.

Всего 64 клетки, 64 числа $\in [1;64]$, все разные.

Пусть Ваня выберет первую клетку числом 64.

Тогда в худшем случае будет такая ситуация, что остальные числа в таком перекрестии будут $[1; 14]$ останутся числа из диапозона $[15; 63]$.

Ване требуется взять такое число из диапозона $[1; 14]$, что его сумма с числом в новой ~~в~~ прямой будет максимальной ($\max$ возможная $: 14 + 63 = 77$.)

~~(Наихудший вариант, если 63 и 1 окажутся на 1 прямой)~~
~~(их сумма = 64)~~

Наихудший случай: числа в диапозоне $[57; 63]$ окажутся на прямой с 1, числа в диапозоне $[50; 56]$ на прямой с 2, $[43; 49]$ с 3, $[36; 42]$ с 4, $[~~30~~29; 35]$ с 5, $[22; 34]$ с 6, $[15; 21]$ с 7. максимальная сумма в таком случае:
$1 + 63 = 64$

Таким образом получим гарантированную сумму: $64 + 64 = 128$.

~~Ответ: 128.~~ В иных случаях 63 будет находиться на прямых с числами $\neq 1$, ~~в~~ в таком случае сумма будет > 128.

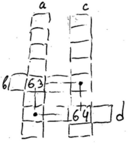
(~~Ответ: 128.~~) Если иначе описывать алгоритм:

1) Если 64 и 63 лежат на одной прямой: складываем их и прибавляем max число, лежащее на прямой 63 или прямой 64 (они различные)

2) Если 64 и 63 лежат на разных прямых:
ищем на каких их числах x их прямые пересекаются:
таких числа 2. минимальные 1 и 2 $\Rightarrow$ берём 2.
$64 + 63 + 2 = 129$ - гарантированная максимальная сумма
$\Rightarrow$ предыдущие рассуждения не до конца верны.

Ответ: 129. оценка не верна

Бланк ответов



а, в - прямые 63
c, d - прямые 64.

Задание 3.

$a^2 > b^2 > c^2 > d^2$

$a^2 > a^2+k > a^2+2k > a^2 > 3k$.

такого быть не может, т.к. 4 квадрата чисел различаются на равное число

И что?

$(n-1)^2 = n^2-2n+1$

$n^2 = (n-1)^2+2n-1$

Разница между квадратами всегда различна, т.к. n будет каждый раз другим. Если мы говорим про ~~соседние~~ квадраты соседних чисел.

$\Rightarrow a^2 > b^2 > c^2 > d^2$ не выполняется. —