ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802358341691

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Фамилия БОДНЯ

Имя ВЛАДИСЛАВ

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 30 06 2005

Город участия МАГНИТОГОРСК

Аудитория 23

Телефон 89511257675

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802358341691

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Город участия МАГНИТОГОРСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	15	0					
Балл члена жюри №2	20	20	0	15	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 55

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

Оценим минимальное количество задач, которое мог получить студент. Он получил точно хотя бы 1 задачу, т.к. сумма равна 2021. Если он получил ровно 1 задачу, то в сумме есть единственное слагаемое 2021. Оно не является палиндромом. Значит, задач минимум 2. Докажем, что он не мог получить ровно 2 задачи.

Предположим, что это могло произойти, тогда 2021 представимо в виде суммы 2-х палиндромов. Выпишем первые несколько палиндромов, больших 10:

11, 22, 33, 44 ..... ~~Рассмотрим си Обозначим~~

Если $11 + a = 2021$, то $a = 2021 - 11 = 2010$ - не является палиндромом.

Если $22 + a = 2021$, то $a = 2021 - 22 = 1999 < 2000$.

Заметим, что при сумме двух палиндромов, чтобы получилось 2021, нужно, чтобы каждый был меньше 2000, ведь если ~~a~~ число $b = 11$, то при $a + b = 2021$: a - не палиндром, а при $b \geq 22 \Rightarrow a < 2000$. Тогда каждое из чисел в этой сумме ~~не про~~ меньше 2000. При этом хотя бы одно из 2-х чисел больше 1000, в противном случае $\begin{cases} a < 1000 \\ b < 1000 \end{cases} \Rightarrow a + b < 2000$, но $a + b = 2021 > 2000$. V

Таким образом, оба числа меньше 2000 и хотя бы одно больше 1000. Рассмотрим число, большее 1000. ~~По вышедока~~ Обозначим его k. По вышедоказанному $1000 < k < 2000$ $\Rightarrow$ первая цифра числа k равна 1. Тогда k имеет вид: $\overline{1mm1}$, т.к. k - палиндром. Посмотрим на разряд единиц ~~k~~ k, в нём стоит 1, т.к. k - палиндром. Обозначим второе число, как ℓ. Нужно, чтобы $k + \ell = 2021$, причем в разряде единиц k стоит 1. Тогда в разряде единиц ℓ должно стоять 0, т.к.

в разряде единиц 2021 также стоит 1.

Более формально:

$k = 10x + 1$; $\ell = 10y + \overline{f}$

$2021 = 202 \cdot 10 + 1$

По условию $k + \ell = 2021$

$$10x + 1 + 10y + \overline{f} = 202 \cdot 10 + 1$$

$$10x + 10y + \overline{f} = 202 \cdot 10$$

$$10(x+y) + f = 2020$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{f} = 0$$

Итак число ℓ заканчивается на 0. Но такое невозможно, т.к. $\ell > 10 \Rightarrow$ 1-ая цифра ℓ тоже 0, но числа без ведущих нулей $\Rightarrow \ell = 0$, противоречие, т.к. $\ell > 10$.

Противоречие, значит 2021 не представимо в виде 2-ух палиндромов. Тогда студент получит минимум 3 задачи.

Сделали оценку на 3, приведем пример:

$a_1 = 1001$

$a_2 = 909$ → палиндромы

$a_3 = 111$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2021 \quad [B]$$

$$1001 + 909 + 111 \overset{\vee}{=} 2021 \quad [B]$$

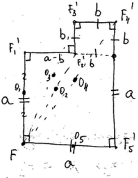
Итак, студент получит минимум 3 задачи.

Ответ: 3.

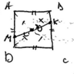
+

Задание 2

Да, существует. Приведём пример



Построим многоугольник, состоящий из 2-х приложенных друг к другу квадратов. Пунктирной линией показан разрез. Понятно, что при разрезе образуется 2 ~~квадрату~~ квадрата, а у любого квадрата центр симметрии — это точка пересечения диагоналей:



Рассмотрим квадрат $ABCD$, отметим O — точку пересечения диагоналей. $AO=CO=BO=DO$.

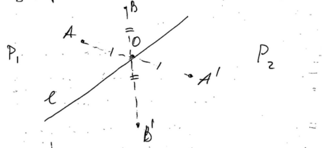
~~Про~~ Проведём прямую $MK \ni O$. Заметим, что $\angle MOD = \angle KOB$, $\angle DMO = \angle BKO \Rightarrow \triangle MOD \sim \triangle KOB$, при этом ~~...~~ $OD = OB \Rightarrow$ $\triangle MOD = \triangle KOB \Rightarrow MO = KO$. Таким образом, действительно, центр симметрии квадрата — это точка пересечения диагоналей.

Осталось доказать, что исходный многоугольник не имеет центра симметрии. Предположим обратное. Пусть у него есть какой то центр симметрии. Для дальнейшего доказательства докажем небольшую лемму.

Лемма: Любая прямая, проведённая через центр симметрии, делит плоскость на 2 полуплоскости, в каждой из которых содержится одинаковое кол-во вершин.

Док-во:

Чтобы доказать эту лемму рассмотрим какой-то центр симметрии O:



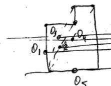
Проведем прямую $\ell \subset O$. Рассмотрим вершину $A \subset P_1$, где P_1 - полуплоскость 1. Но тогда $A' \subset P_2$. Значит кол-во вершин в P_1 равно кол-ву вершин в P_2. (Если вершина V лежит на прямой, то и V' лежит на прямой)

Лемма доказана.

Воспользуемся ей для док-ва исходной задачи.

Рассмотрим вершину F и все остальные вершины. Раз есть центр симметрии, то у F есть противоположная ей точка F', а центр симметрии O лежит на середине отрезка FF'. Рассмотрим все возможные F' (смотри рисунок) и отметим все $O_1; O_2 \dots O_5$.

Проведем через них прямые, параллельные нижней стороне:



Видим, что во всех случаях в верхней полуплоскости вершин больше, чем в нижней, а такого невозможно по вышедоказанной лемме. Противоречие.

Значит, исходный многоугольник не имеет центра симметрии.

Ответ: существует.

Задание 4

Рассмотрим уравнение $x+\sqrt{y}=n$, где $n=const$, $n\in\mathbb{N}$; $\{x;y\}\in\mathbb{N}$

Тогда $\sqrt{y}=n-x$, отсюда ОДЗ: $(n-x)\geq 0$
$n\geq x$
Так как $\{x,y\}\in\mathbb{N}$, то $x\leq n$
$\{x,y\}\neq 0 \Rightarrow n\neq x$, отсюда: $x<n$ и $x>0$,
значит $x\in[1;n-1]$, причём для каждого x определяется однозначно y: $y=(n-x)^2$
Тогда ур-е вида $x+\sqrt{y}=n$ имеет $n-1$ решение.

Вернёмся к условию задачи:

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$

$\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{k}}}_{>0 \text{ по ОДЗ}}=\underbrace{2023-m}_{>0}$, $m<2023$
$\Downarrow$
$\boxed{m\in[1;2022]}$

$\underbrace{n}_{\in\mathbb{N}}+\sqrt{\underbrace{k}_{\in\mathbb{N}}}=\underbrace{(2023-m)^2}_{\in\mathbb{N}}$

Ур-е вида $x+\sqrt{y}=n$, имеет $(2023-m)^2-1$ решений.
Так как $m\in[1;2022]$, то $(2023-m)^2$ принимает все значения от 1 до 2022. Тогда для каждого m для оставшейся части ур-я имеется $(2023-m)^2-1$ решений, то есть

всего решений будет:

$1^2-1+2^2-1+3^2-1+\ldots+2021^2-1+2022^2-1=$

$=\underline{(1^2+2^2+3^2\ldots+2022^2)-2022}$

сумма не досчитана

Ответ: $(1^2+2^2+3^2+\ldots+2022^2)-2022$.

$\pm$

Задание 3

a^2, b^2, c^2, d^2 – образуют арифметическую прогрессию, значит $\frac{a^2+c^2}{2}=b^2$ и $\frac{b^2+d^2}{2}=c^2$

Так как $\{a,b,c,d\}>0$, то применим нер-во о средних ($AM \geq GM$):

$$b^2=\frac{a^2+c^2}{2}\geq\sqrt{a^2c^2}=ac \Rightarrow b^2\geq ac$$

$$c^2=\frac{b^2+d^2}{2}\geq\sqrt{b^2d^2}=bd \Rightarrow c^2\geq bd$$

По условию арифм. прогрессию образуют также

$$\frac{1}{a+b+c};\ \frac{1}{a+b+d};\ \frac{1}{a+c+d};\ \frac{1}{b+c+d}$$

Отсюда:

$$\frac{2}{a+b+d}=\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d}$$

и

$$\frac{2}{a+c+d}=\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}$$

Дополнительный лист №1

Итак, имеем систему:

$$\begin{cases} a^2+c^2=2b^2 & (1) \\ b^2+d^2=2c^2 & (2) \\ \dfrac{2}{a+b+d}=\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{a+c+d} & (3) \\ \dfrac{2}{a+c+d}=\dfrac{1}{a+b+d}+\dfrac{1}{b+c+d} & (4) \end{cases}$$

Причем $b^2 \geq ac$ и $c^2 \geq bd$

Выпишем нер-ва (1) и (2): $\boxed{a^2+c^2 = 2b^2 \geq 2ac}$

(1) $a^2+c^2=2b^2$, $b^2 \geq ac \Rightarrow 2b^2 \geq 2ac$

Тогда: $\underbrace{a^2+c^2 \overset{\geq}{\leq} 2ac}_{\text{неверно}}$; $a^2-2ac+c^2 \leq 0$

$(a-c)^2 \leq 0$

Но мы знаем, что квадрат числа не может быть отрицательным, то есть $\begin{cases}(a-c)^2 \leq 0 \\ (a-c)^2 \geq 0\end{cases} \Rightarrow a-c=0$

Отсюда: $a=c$.

Далее: (2) $b^2+d^2=2c^2$; $c^2 \geq bd \Rightarrow 2c^2 \geq 2bd$

Отсюда: $b^2+d^2 \leq 2bd$

$$(b-d)^2 \leq 0$$
$$\Downarrow$$
$$b=d$$

Итак, $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$. Осталось доказать $a=b$ и $c=d$.

Подставим это в рав-ва (3) и (4):

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a+2b}=\dfrac{1}{2a+b}+\dfrac{1}{2a+b} \\ \dfrac{2}{2a+b}=\dfrac{1}{2a+b}+\dfrac{1}{2a+b} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{a+2b}=\dfrac{2}{2a+b}$$

$$a+2b=2a+b$$
$$a=b$$

Итак, $\begin{cases} a=c \\ b=d \\ a=b \end{cases}$, значит $a=b=c=d$. Что и требовалось доказать.

Задание 5

Рассмотрим 2 каких нибудь числа a и b на доске. Существует минимум 2 варианта ходов, содержащих эти 2 числа. То есть если они не стоят ни на одной строке или столбце, то есть ровно 2 способа походить ладье так, чтобы ход содержал эти клетки.

Рассмотрим $a=64$, $b=63$. Тогда минимальная сумма клеток a, b и c равна $64+63+2=129$, т.к. каждое число стоит по 1 разу. Далее рассмотрим 64 и 62. Минимальная сумма равна $64+62+4=130$.

~~Далее 63 и 62: 63+62+6=131~~

Далее 64 и 61: $64+61+6=131$

⋮

64 и 49: $64+49+30=143$

64 и 48: $64+48+32$

64 и 46 $64+46+$

...