ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802906014513

Титульный лист

Направление ☑ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Фамилия МАРАКУЛИН

Имя АНДРЕЙ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 06 05 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 513

Телефон 89002156950

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802906014513

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☑ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	25	00	00						
Балл члена жюри №2										

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 000

Подпись члена жюри №1 Шт

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1.

Если белая роза имеет номер 1, тогда сумма любых двух белых роз может дать любое целое положительное число => ~~нельзя~~ красные розы не могут иметь какое-либо число => роза с номером 1 — красная.

При $n=1$ существует такая раскраска:

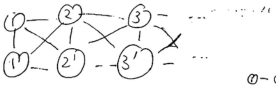
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \infty \\ к & к & б & б & \dots & б \end{array}$$

(заменим розу = покрасим розу)

Если мы хотим получить ещё какие-то раскраски, необходимо заменить какую-то белую розу на красную, но тогда необходимо заменить и все розы, делящиеся на 2 и число заменённой розы, далее все, делящиеся на 2 и на числа новых заменённых роз, и так далее. Например мы заменим розу под номером 3 => нужно заменить розу под номером 6, далее под номерами 12 и 18 ... Но в таком случае белые розы под номерами 4 и 8 дают в сумме 12. При такой раскраске получается, что белые розы дают в сумме чётное число, а на них находятся красные розы. ~~Возьмём которые это~~ Такая раскраска нам не подходит. Возьмём розы под номерами 1 и N и покрасим их. Если $N \geq 5$ => его можно разложить на сумму двух чисел. Заменим их и все возможные произведения. Какое-то число будет иметь в разложении 2 => мы заменим все чётные числа => останутся только нечётные => будут существовать две нечётные белые розы, дающие в сумме чётную красную. Если мы заменим все такие розы, то все розы станут красными => бесконечных раскрасок не существует (−)

№3.

1) Пусть гости с одной стороны имеют номера 1, 2, 3 ... n, а с другой стороны 1', 2', 3' ... n'.
Как стол можно представить в виде графа, где вершина - гость, ребро соединяет двух дружащих гостей:

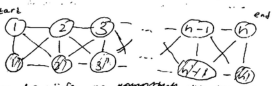


(i) - (j) - пара гостей i и j, которые дружат

Возьмём в хороший набор пару (1)-(2) и будем его дополнять до очень хорошего. Мы не можем взять (1)-(1') и (1)-(2'), т.к 1' и 2' дружат с 2, а значит 2 расскажет им задачку и они расстроятся. Возьмём 3 => мы не можем взять 3' (по аналогии с 1' и 2'). Находим по аналогии до n. Значит очень хороший набор будет состоять из (1)-(2), (2)-(3) ... (n-1) - (n) (n-1 пар)

Ответ: n-1

Это так же можно сделать с помощью dfs: запускаемся из вершины 1 и заходим в первую вершину. Все остальные смежные вершины закрашиваем, их брать не будем, иначе эти гости расстроятся (из предыдущего доказательства).
Получаем:

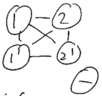


кол-во рёбер, по которым мы прошли является ответом (их n-1)

Схема кто кому рассказывает:

(как мы видим 1' рассказывает 2 и 2', 2' рассказывает 1' и 2, 2 рассказывает 1' и 2' => необходимо взять 2 или 2', т.к из них ~~[illegible]~~ можно перейти дальше)

2)



В данном случае ответ – все возможные пары друзей (кол-во рёбер), т.к если мы добавим хотя бы одну другую пару в такой набор, то один из гостей расстроется, т.к он соединён с другим.

Ответ: 6

№ 2.

1) Заметим, что при $y = 3 + 4k$, $k \in \mathbb{N}$ $f(y) = 0$

при $y = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ $f(y) = 4k$.

при $y = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ $f(y) = 1$

при $y = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ $f(y) = 4k + 3$

Докажем по индукции, что $y = 4k$, $k \in \mathbb{N}$

$f(y) = y$

Б.и. $f(4) = 4$

Ш.и. $f(4 \cdot (k+1)) = 4 \cdot (k+1)$

Д.и. $f(4 \cdot (k+1)) = 4k \text{ xor } 4k+1 \text{ xor } 4k+2 \text{ xor } 4k+3 \text{ xor } 4k+4 =$

$4k = *00$, где $*$ – любая непустая последовательность из 0 и 1, включающая х.б одну единицу.

$4k \text{ xor } 4k+1 =$

$= *00 \text{ xor } *01 = 1$

$1 \text{ xor } 4k+2 = 1 \text{ xor } *10 = 4k+3$

$4k+3 \text{ xor } 4k+3 = 0$

$0 \text{ xor } 4k+4 = 4k+4 = 4(k+1)$ ч.т.д (дополнительно мы доказали все остальные утверждения) т.к $f(y)=0$ и $f(y)=1$ только при $y \not\vdots\, 2$ =>

=> ~~[illegible]~~ y должно $\vdots\, 2$. => необходимо взять чётное n.

если $f(y) = 4k$ ($f(y) \vdots\, 4$) => $x = \dfrac{f(y) - 2022n - 2022}{n^2}$
(n - чётное!!!)

если $f(y) = 4k+2$ ($f(y) \vdots\, 2$, но $f(y) \not\vdots\, 4$) => $x = \dfrac{f(y)-1-2022n-2022}{n^2}$
(n - чётное!!!) ⊕ 10б

2) Белый кролик никогда не сможет отгадать x, если y всегда получается нечётный.

при нечётном B, с может быть ~~[illegible]~~ только чётным, т.к первое и второе слагаемое можно сделать чётными одновременно или нечётными одновременно

$$\left(\begin{array}{l} \overset{x\cdot n^2}{\text{чёт.}} + \overset{B\cdot n}{\text{чёт.}} + \overset{c}{\text{чёт.}} = \overset{y}{\text{чёт.}} \\ \overset{x\cdot n^2}{\text{чёт.}} + \overset{B\cdot n}{\text{чёт.}} + \overset{c}{\text{нечёт.}} = \overset{y}{\text{нечёт.}}\ x \\ n - \text{чёт.} \end{array}\right)$$

при чётном B, с ~~хоте~~ может быть только чётным, т.к если x - чётный, то при нечётном С получается: $\overset{x\cdot n^2}{\text{чёт}} + \overset{B\cdot n}{\cancel{\text{чёт}}} + \overset{c}{\text{нечёт}} = \overset{y}{\text{нечёт}}$, но при x нечётный и c - нечётный: $\overset{x\cdot n^2}{\text{нечёт}} + \overset{B\cdot n}{\text{чёт}} + \overset{c}{\text{нечёт}} = \overset{y}{\text{чёт}}$ (при n - нечёт) => B - любое целое неотрицательное число, а

C - ~~чётное~~ любое целое чётное неотрицательное число

(~~при~~ Это общий случай, при нечётном x и чётном B, c может быть нечётным)

⊕ 15 б

Бланк ответов