ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802671068291

Титульный лист

Направление	■ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия КРАМАРЬ

Имя ДАНИЛ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 10 03 2005

Город участия ИЖЕВСК

Аудитория 4

Телефон +79120113469

Дата 25 02 2023 **Подпись** Крин

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802671068291

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ИЖЕВСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 12:29 до 12:31

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	19	00	00						
Балл члена жюри №2	25	19	00	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 044

Подпись члена жюри №1 Шти

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1

Пусть числа, соответствующие белым розам – белые числа, красным розам – красные. Заметим, что роза с номером 1 точно будет красной, иначе все розы превратятся в белые: $n_i + 1 = n_{i+1}$, что не соответствует условиям. Однако при условии, что 1 - красное число, условие красных будет соблюдаться, т.к. $n_i \cdot 1 = n_i$.

Пусть 2 - белое число, тогда ~~[illegible]~~ все числа, которые делятся на 2 - тоже белые (например: 4, 6, 8, 10 и т.д.). Таким образом, получим что ~~и~~ сумма любого белого числа с другим белым числом будет делиться на 2, т.е. тоже будет белым числом => условие белых соблюдается. Заметим, что любое ~~н~~ белое число можно записать в виде: $2 \cdot n$, где $n \in N$. Все остальные числа закрасим в красный цвет. Заметим, что произведение любых красных чисел не будет равно: $2 \cdot n$, где $n \in N$, т.к. ни одно из красных чисел не ~~равно~~ делится на 2 => условие красных выполнено.

Заметим, что данный метод работает не только с числом 2, но и со всеми остальными простыми числами, кроме 1. Пусть x - это самое простое число. Закрасим его в белый цвет, а также закрасим все числа вида: $n \cdot x$, где $n \in N$. Таким образом сумма любых белых чисел будет выглядеть так: $x \cdot m + x \cdot n = x(n+m) = x \cdot r$, где $m, n, r \in N$ => => условие белых выполнится. Тогда все остальные числа закрасим в красный и заметим, что произведение любых красных не будет равно $x \cdot n$, где $n \in N$, т.к. x - простое белое число => условие красных выполнено.

Заметим, что простых чисел бесконечно много => существует бесконечное количество раскрасок, которые устроят Королеву.

Ответ: существует.

(4) 25б

№2

1. Давайте переберём несколько первых значений $f(n)$:

$f(1)=1$ $\quad f(5)=1$ $\quad f(9)=1$

$f(2)=3$ $\quad f(6)=7$ $\quad f(10)=11$

$f(3)=0$ $\quad f(7)=0$ $\quad f(11)=0$

$f(4)=4$ $\quad f(8)=8$ $\quad f(12)=12$

и док-во?

Заметим, что в значениях $f(n)$ существует цикл длиной 4 элемента, а именно:

при $n \% 4 = 0$ $\quad f(n)=n$

$n \% 4 = 1$ $\quad f(n)=1$

$n \% 4 = 2$ $\quad f(n)=n+1$

$n \% 4 = 3$ $\quad f(n)=0$

$y = x \cdot n^2 + 2022n + 2022$

$y = x \cdot n^2 + 2022(n+1)$

Пусть кролик спросит у Алисы значение при $n=2$, тогда:

$y = x \cdot 2^2 + 2022(2+1)$

$y = 4x + 6066$, заметим, что $4x \% 4 = 0$, $6066 \% 4 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4x+6066) \% 4 = 2$, т.к. $y \% 4 = 2$, то $f(y) = y+1$ $\quad$ ± $\quad$ 4б

Учитывая, что кролик знает $f(y)$ и n составим систему:

$$\begin{cases} y = 4x+6066 \\ f(y) = y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x+6066 \\ y = f(y)-1 \end{cases} \Rightarrow f(y)-1 = 4x+6066 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{f(y)-6067}{4} \quad (1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\forall$ Белый кролик может выяснить за один вопрос какое число загадала Алиса, спросив у неё $n=2$ и подставив в выражение (1).

2. $y = x \cdot n^2 + B \cdot n + C$

~~Пусть $C \% 2 = 1$, тогда при $\forall x \% 2 = 1$:~~

~~Пусть $C \% 2 = 1$; $x \% 2 = 1$, $B \in R$; $n=1$:~~

~~$y = x + B + C$~~

Пусть $C \% 2 = 0$; $B \in Z$, $B \geq 0$, $C \geq 0$

подставим $n=2$, тогда:

$y = 4x + 2B + C$, учитывая, что кролику известны B, C и n могут возникнуть 4 случая:

Бланк ответов

Продолжение задачи 2.2:

1. $2B\%4=0$ и $C\%4=0$, тогда $y\%4=0 \Rightarrow y=f(y)$
2. $2B\%4=0$ и $C\%2=0; C\%4=2$, тогда $y\%4=2 \Rightarrow 1+y=f(y)$
3. $2B\%2=0; 2B\%4=2$ и $C\%4=0$, тогда $y\%4=2 \Rightarrow 1+y=f(y)$
4. $2B\%=0; 2B\%4=2$ и $C\%2=0; C\%4=2$, тогда $y\%4=0 \Rightarrow y=f(y)$

Во всех этих случаях Белый кролик может узнать x с одного вопроса, однако если $C\%2=1$, то при $n=2$:

$y=4x+2B+C$: $y\%4=1$ или $y\%4=3 \Rightarrow f(y)=0$ или $f(y)=1$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $n=2$ кролик ~~кролик~~ не может узнать ответ

Также при всех $n\%2=0$ кролик не узнает ответ, т.к. $(n^2x+nB)\%2=0$, а $C\%2=1$

$\Rightarrow f(y)$ будет также принимать значения 0 или 1.

При $n\%2=1$ значение x будет неизвестно (т.е. n^2x может быть как чётным, так и нечётным) $\Rightarrow$ нельзя будет однозначно знать чему равно $f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходят только случаи, когда $B\in\mathbb{Z}, B\geq 0; C\%2=0; C\geq 0$;

Ответ: $B\in\mathbb{Z}, B\geq 0; C\%2=0; C\geq 0$;

(+) 15б.