ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802248095608

Титульный лист

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ГОРДЕЕВ

Имя ЕГОР

Отчество ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 11 10 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 532

Телефон 89530443330

Дата 25 02 2023 **Подпись** ЕЗ

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802248095608

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	16	02	02						
Балл члена жюри №2	25	16	02	02						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 045

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Вариант 1

1) раскрасим все розы, номера которых делятся на некоторое простое p в белый, а остальные - в красный.
Тогда сумма номеров двух белых роз делится на p, т.е соответствует белой розе, а произведение номеров двух красных роз не делится на p (т.к p - простое и не один из исходных номеров не делится на p), т.е соответствует красной розе.
Таким образом для любого простого p можно получить подходящую раскраску и т.к. множества чисел делящихся на какое-то простое p и q не совпадают (т.к q не делится на p, не делится на q), а простых чисел бесконечное множество, мы получим бесконечное кол-во подходящих раскрасок.
Ответ: существует ⊕

2) $f(1)=1$
$f(2)=3=2+1$
$f(3)=0$ - база индукции
$f(4)=4$

В этой задаче используется обозначение $x\%y=a$, что означает остаток от деления x на y равен a. ✓

Докажем, что $f(4n)=4n$; $f(4n+1)=1$; $f(4n+2)=4n+3$; $f(4n+3)=0$, $n\in\mathbb{N}$ если $f(4n-1)=0$.

$\boxed{f(n)=f(n-1)\,xor\,n \text{ - по определению } f(n)}$ ✓

$f(4n)=f(4n-1)\,xor\,(4n)=0\,xor\,(4n)=4n$ т.к $0\,xor\,a=a$ ✓

$f(4n+1)=f(4n)\,xor\,(4n+1)=(4n)\,xor\,(4n+1)=1$ ✓ т.к $4n$ в двоичной системе заканчивается на двануля (почему?), а $4n+1$ - число на 1 большее - будет совпадать с $4n$ во всех разрядах кроме послед. (значит / и что из этого следует?)

$f(4n+2)=f(4n+1)\,xor\,(4n+2)=1\,xor\,(4n+2)=4n+3$ ✓ т.к. $1\,xor\,a=a+1$ если a - чётное

$f(4n+3)=f(4n+2)\,xor\,(4n+3)=(4n+3)\,xor\,(4n+3)=0$ т.к $a\,xor\,a=0$ ✓

① Таким образом, если $n=2$, то
$y=4x+2022\cdot 3$ $f(y)=f(4x+2022\cdot 3)$, т.к $2022\%4=2$, то
$y\%4=2 \Leftrightarrow f(y)=\cancel{f(y+1)}=4x+2022\cdot 3+1=4x+6067$ ✓

Тогда если Кролик скажет $n=2$, то он может сразу узнать $x = \frac{f(y)-6067}{4}$, где $f(y)$ он узнает от Алисы. (За 0 ходов он, конечно, не может узнать x, а значит 1 - минимальное число вопросов) ✓ ⊕

① $\underbrace{f(x\cdot n^2+B\cdot n+C)}_{f(y)}$ не даёт Кролику достаточно информации, если $y \% 4=1$ или $y\%4=3$, т.е если $y\%2=1$, причём сколько бы раз не получалось $y\%2=1$, Кролик не сможет узнать x, т.к ~~т~~ если x увеличить на 4, $f(y)$ будет то же. ✓

Если же Кролик назовёт n, такое, что $y\%2=0$, то он сможет сразу узнать ~~x~~ x. ✓

Значит B и C не подходят только если при них нельзя подобрать такое n, что ~~y~~ $y\%2=0$. ✓

Если $C\%2=0$, то при $n=2$. $y\%2=0$. почему?

Если $C\%2=B\%2=x\%2=1$, то $x\cdot n^2+B\cdot n$ - чётное,
или $C\%2=1$ и $B\%2=x\%2=0$ а значит $y\%2=1$ и узнать x невозможно, т.к $x\cdot n^2$ ~~и~~ и $B\cdot n$ имеют ту же чётность, что и n, если x и B - нечётные и чётные если $B\%2=x\%2=0$.

Если $C\%2=1$ и $B\%2\neq x\%2$, то при $n=1$ получим некоторый y, такой, что $y\%2=0$ и $f(y)>1$, что поможет нам, что x можно отгадать.
почему? ⊕

$xn^2+Bn+C\equiv_2 C\equiv_2 1$ $n\equiv_2 1$ $xn^2+Bn+C\equiv_2$
$C\equiv_2 1$ $n\equiv_2 0$ $\equiv_2 x+B+C$ — остаток зависит от x

Ответ: при чётном C и при нечётном C, если загадываемое число и B имеют разную чётность.

при $C\equiv_2 1$ существует x для которого нет стратегии при фиксированных B и C

3) ① Рассмотрим граф, рёбра - ~~дорог~~ друзья, вершины - гости.

Если в нём циклы, то они не хороши, т.к. по этому циклу загадка пройдёт и пойдёт в обратную сторону, дойдя до гостя, который её рассказал.

Значит нужно max кол-во рёбер в графе без цикла, т.е кол-во рёбер в дереве с $2n$ вершинами.

Ответ: $2n-1$ ⊕

② 16 ? ⊖

4) Алгоритм:

1) Алиса проходит по всем городам и запоминает всю карту, т.е весь граф.

2) Алиса находит какую-то вершину с 2-мя соседями и предпологает, что это — лист обоих деревьев.

3) Алиса мысленно раскрашивает одного из соседей листа в белый, а другого в чёрный, сам лист — в серый.

4) На каждом шаге Алиса красит все не серые вершины, соседние с белыми в белый, а с чёрными в чёрный, если вершина соседняя с обоими, она становится серой, а если она пытается покрасить чёрную вершину в белый или наоборот, то предположение неверно и Алиса выбирает другую вершину на шаге (2).

Шаг (4) повторяется пока есть непокрашенные вершины

5) Если после (4) шага получилась какая-то раскраска то добавляем её в список раскрасок которые надо рассмотреть позже и повторяем шаги (2-4) пока не закончатся вершины с 2-мя соседями.

6) Из списка раскрасок удаляем все одинаковые для экономии времени.

7) Для каждой раскраски из списка перебераем все возможные способы сделать пары из белых и чёрных городов, и выбираем из них подходящие способы т.е. те, где если A_k соединено с $A_i, \ldots, A_j$, то C_k соединено с $C_i, \ldots, C_j$ и A_k и C_k имеют одних серых соседей (как это проверить?)

8) Для каждой подходящей раскраски в которой все белые и чёрные вершины в парах, записываем все пары в список возможных пар столиц — окончательный такой список является ответом на задачу Алисы.

Доказательство:

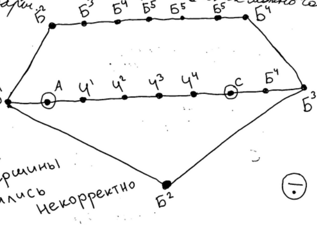
• пункты (6-8) не требуют пояснения т.к там мы просто перебираем все возможные способы получить пары, считая, что (1-5) дали нам правильное разделение на 2 стороны и каждую такую пару считаем как возможную пару столиц.

• в пунктах (2-5)

1) вершины с двумя соседями - единственные, что могут стать листьями т.к у каждого листа ровно 1 сосед в каждой из 2-ух стран

2) алгоритм в (3-4) - bfs(breadth first search) и, если в какую-то вершину позже пришли по белому чем по чёрному пути или наоборот, то граф не симметричен (т.к один путь короче другого), если считать что эта вершина - лист, иначе граф симметричен т.к. ~~все вершины~~ у всех вершин белых есть равноудалённая от исходного листа чёрная и их можно соединить в пары.

Начинаем с А



Серые вершины нашлись некорректно