ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802820124714

Титульный лист

Направление [x] информатика [ ] история [ ] математика [ ] обществознание [ ] русский язык [ ] физика [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия ХАФИЗОВ

Имя АРТЁМ

Отчество РУСТАМОВИЧ

Дата рождения 09 08 2005

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 349

Телефон 89525040214

Дата 25 02 2023 **Подпись** Ж

Пример заполнения АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802820124714

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	05	25	00	00						
Балл члена жюри №2	05	25	00	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 030

Подпись члена жюри №1 Што **Подпись члена жюри №2** Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1

Т.к. все розы пронумерованы целыми положит-ми числами, а и для любого целого положит. числа существует ровно одна роза с таким номером => роз бесконечно много (т.к. целых положит-ых чисел бесконечно много)

Рассмотрим комбинацию покраски следующего вида: ~~все розы кроме~~ единственная белая роза - с номером p, где $p \in \mathbb{N}$, p - простое число, остальные розы красные

=> Чтобы раскраска устраивала королеву, нужно, чтобы ~~любое~~ 1. сумма номеров любой пары белых роз соответств. белой розе: т.к. белая роза одна, то такая пар не существует => условие выполняется $p + p = 2p$

(*) должны быть и белые и красные розы, белая - 1, красных - бесконечно много => усл. выполняется

2. произв. любой пары номеров красных роз соответств. красной ~~роз~~ розе: докажем, что это условие не нарушается: оно нарушается в том случае, когда такое произведение соответствует белой розе, а т.к. белая роза в раскраске только одна рассмотрим её номер:

p - простое число => $p = 1 \cdot p = p \cdot 1$, ~~притом~~ причем других способов разложить p в виде произведения положит. целых чисел нет (т.к. p - простое и ~~не~~ делится только на 1 и на себя) => условие "2" нарушается только в том случае, если розы с номерами 1 и p - красные, но роза с номером p - белая => условие не может нарушиться =>

Оба условие выполняются => раскраска подходит т.к. (*).

Теперь докажем, что таких раскрасок бесконечно много: будем выбирать последовательно p по возрастанию как простые числа, а т.к ~~р~~ кол-во простых чисел бесконечно => ~~выбрать~~ число способов выбрать p также бесконечно => таких подходящих раскрасок также бесконечно => числа такого числа N не найдется

(+) 5б.

Ответ: такого числа N не существует

№ 2.

Рассмотрим ф-цию $f(t)$ ($t \in \mathbb{N}$):

$f(1) = 1$

$f(2) = 3 = 1 \text{ xor } 2$

$f(3) = 0 = 1 \text{ xor } 2 \text{ xor } 3 = f(2) \text{ xor } 3$

$f(4) = 4 = 1 \text{ xor } 2 \text{ xor } 3 \text{ xor } 4 = f(3) \text{ xor } 4$

$\Rightarrow f(n) = f(n-1) \text{ xor } n$

Теперь докажем по индукции; база — значения $f(t)$ при $t \in [1;4]$

индуктивное предположение: $\begin{cases} f(4d) = 4d, \ d \in \mathbb{N}; \\ f(4d+1) = 1 \\ f(4d+2) = 4d+3 \\ f(4d+3) = 0 \end{cases}$

Шаг индукции:

① $f(4k) = f(4k-1) \text{ xor } 4k$ $\quad 4k-1 = 4d+3$, $d = k-1 \Rightarrow f(4d+3) = 0$

$\Rightarrow f(4k) = 0 \text{ xor } 4k$ $\quad 0 \text{ xor } 4k = 4k$ т.к. все единицы в двоич. записи числа $4k$ переходят в единицы, а все нули — в нули

$\Rightarrow f(4k) = 4k$ — верно ($k \in \mathbb{N}$)

② $f(4k+1) = f(4k) \text{ xor } (4k+1)$, т.к. $4k$ четно $\Rightarrow$ в младшем разряде двоичной записи $4k$ стоит "0" $\Rightarrow$ т.к. $4k+1$ на 1 больше $4k$ $\Rightarrow$ двоичная запись $4k+1$ совпадает с $4k$, кроме разряда единицы $\Rightarrow$ $4k \text{ xor } (4k+1) = 1$

$f(4k+1) = 4k \text{ xor } (4k+1) = 1$

③ $f(4k+2) = f(4k+1) \text{ xor } 4k+2$ $\quad 4k+2$ — четно, $f(4k+1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \text{ xor } 4k+2 = 4k+3$ (т.к. в двоич. записи к $4k+2$ добавл. единица в младший разряд)

$\Rightarrow f(4k+2) = 1 \text{ xor } 4k+2 = 4k+3$

④ $f(4k+3) = f(4k+2) \text{ xor } 4k+3$, т.к. $m \text{ xor } m = 0$ (т.к. все разряды совпадают в двоич. записи) $\Rightarrow$

$f(4k+3) = 4k+3 \text{ xor } 4k+3$

$f(4k+3) = 0$ $\Rightarrow$ все предположения верны, индукция доказана.

+ 10б

Рассмотрим $y = xn^2 + 2022n + 2022$

при $n = 2$ $\quad y = 4x + 4044 + 2022$ $\quad 4x + 2022 + 4044 \overset{4}{\equiv} 2$

$\Rightarrow 4x + 6066 = 4k + 2 \Rightarrow f(4x + 6066) = f(4k+2) = 4k+3 =$

$= 4x + 6067 \Rightarrow$ при $n = 2$ Алиса сообщит кролику число

$4x + 6067 = g$, $g \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{g - 6067}{4}$ — однозначно определяет x $\Rightarrow$ <u>Стратегия кролика</u>: спросить $n = 2$ и посчитать $x = \dfrac{g - 6067}{4}$, где g — ответ Алисы

$\Rightarrow$ Кролик вычислит x за 1 вопрос $\Rightarrow$ меньше нельзя, т.к. не задав ни одного вопроса, он не имеет данных вообще.

Продолжение ⟼

Бланк ответов

Продолжение №2: будем рассматривать разные остатки C и B по модулю 4: пусть $y = xn^2 + nB + C$

① $C \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow$ берем $n = 4 \Rightarrow 16x^4 + 4B + C \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow$
$16x^4 + 4B + C = 4k \Rightarrow f(16x^4 + 4B + C) = f(4k) = 4k = 16x^4 + 4B + C$
пусть ответ Алисы – также $g \Rightarrow 16x^4 + 4B + C = g \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{g - 4B - C}{16} \Rightarrow$ Кролик за 1 ход узнает x

② $C \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow$ аналогично $16x + 4B + C \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow$
$16x + 4B + C = 4k + 2 \Rightarrow f(16x + 4B + C) = f(4k + 2) = 4k + 3 =$
$= 16x + 4B + C + 1 = g \Rightarrow x = \frac{g - 1 - 4B - C}{16} \Rightarrow$ Кролик за один ход узнает x

③ $C \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow$ при $n \equiv 0$ $xn^2 + Bn + C \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow f(xn^2 + Bn + C) = 1$
$\Rightarrow$ спрашивать $n = 4k$ бесполезно

Рассмотрим варианты B и n по модулю 4 и рез-т ф-ии f

$B \overset{4}{\equiv}$ \ $n \overset{4}{\equiv}$	0	1	2	3
1	?	?	?	?
2	1	0	1	0
3	?	?	?	?

как можно увидеть, при $n \overset{4}{\equiv} 2$ рез-т f будет равен или "0", или "1" $\Rightarrow n \overset{4}{\equiv} 2$ бесполезно
при $n \overset{4}{\equiv} 1$ $n^2x + Bn + C \overset{4}{\equiv} x + B + C$ (1)
при $n \overset{4}{\equiv} 3$ $n^2x + Bn + C \overset{4}{\equiv} x + 3B + C$ (2)

$\Rightarrow$ если $B \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} (2) \Rightarrow x$ невозможно всегда определить (x=4)
если $B \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} (2) \Rightarrow x$ невозможно всегда определить (x=4) т.к. есть x, при котором $f(y) = 1$ или $f(y) = 0$
если $B \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} x + 2$; $(2) \overset{4}{\equiv} x \Rightarrow x$ невозможно определить всегда (x=1)
если $B \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} x$; $(2) \overset{4}{\equiv} x + 2 \Rightarrow x$ невсегда можно определить (x=3)
$\Rightarrow$ при $C \overset{4}{\equiv} 1$ x невозможно определить (в скобках были указаны контрпримеры)

④ $C \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow$ аналогично ③ $f(xn^2 + Bn + C) = 0$ при $n \overset{4}{\equiv} 0$ $\Rightarrow n \overset{4}{\equiv} 0$ бесполезно
~~если $B \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} (2)$~~ аналогично ③ при $n \overset{4}{\equiv} 2$ $f(y) = 1$ или $f(y) = 0$
$\Rightarrow n \overset{4}{\equiv} 2$ бесполезно

+ 15 б.

если $B \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} (2) \Rightarrow x$ нельзя найти всегда (x=4)
если $B \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} x$; $(2) \overset{4}{\equiv} x + 2 \rightarrow$ ~~не~~ x нельзя найти всегда (x=1)
если $B \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} (2) \Rightarrow x$ нельзя найти всегда (x=4)
если $B \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow (1) \overset{4}{\equiv} x + 2$; $(2) \overset{4}{\equiv} x \Rightarrow x$ нельзя найти всегда (x=1)
$\Rightarrow$ при $C \overset{4}{\equiv} 3$ нельзя определить x всегда

Ответ: при ~~всех~~ любом B и $C = 4k$ или $C = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$) Кролик сможет определить x

Бланк ответов