ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802543157343

Титульный лист

Направление	☑ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11
Фамилия	БОДНЯ
Имя	ВЛАДИСЛАВ
Отчество	АЛЕКСАНДРОВИЧ
Дата рождения	30 06 2005
Город участия	МАГНИТОГОРСК
Аудитория	23
Телефон	89511257675

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802543157343

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☑ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Город участия МАГНИТОГОРСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	25	0	2	0	0				
Балл члена жюри №2	25	25	0	2	0	0				

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 052

Подпись члена жюри №1 [подпись]

Подпись члена жюри №2 [подпись]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание № 1

Докажем, что существует бесконечное количество раскрасок, которые устроят королеву. Выберем какое нибудь простое число p. Обозначим i-ый член последовательности (i-ый цветок, т.е. цветок, имеющий номер i) как a_i. Покрасим все a_i в белый, если $a_i \vdots p$. Т.е. множество W белых цветков содержит все $a_i \vdots p$, а все $a_j \not\vdots p$ покрасим в красный цвет. Получаем, что множество W белых цветов содержит все номера, кратные p, а множество K красных цветов содержит все номера, не кратные p.

Рассмотрим 2 любых элемента a_i и a_j из множества W. Т.к. $\{a_i; a_j\} \in W$, то $a_i \vdots p$ и $a_j \vdots p$. Они покрашены в белый, т.е. по условию должно быть $(a_i + a_j) \vdots p$. Т.к. $a_i \vdots p$ и $a_j \vdots p$, то $(a_i + a_j) \vdots p$, значит для любой пары из множества W (белых цветов) условие выполняется, т.е. для любых $\{a_i$ и $a_j\} \in W \Rightarrow (a_i + a_j) \in W$.

25 +

Рассмотрим теперь $\{a_i; a_j\} \in K$. ~~Зная~~ Мы покрасили в красный все элементы, не кратные p, значит $a_i \not\vdots p$ и $a_j \not\vdots p$. По условию должно выполняться $(a_i \cdot a_j) \not\vdots p$. Действительно, т.к. числа не кратны p, то и их произведение не кратно p. Значит для любой пары из множества K условие также выполняется. Таким образом, мы покрасили все цветы, и условия королевы выполняются.

Осталось заметить, что множество простых чисел P бесконечно и мы можем взять любое p и сделать раскраску по данному алгоритму. Итак, существует бесконечное кол-во раскрасок цветов для королевы. ЧТД.

(стоит сделать оговорку, что для всех простых p раскраска индивидуальна, т.к. во множество W мы кладем все $a_i \vdots p$, а никакое $p_i \nmid p_j$ и (p_i и p_j) - взаимно просты, значит всякая раскраска r при данном p_i - индивидуальна, т.е. действительно раскрасок бесконечное кол-во)

Задание № 2

Докажем по индукции следующее утверждение:

$$\begin{cases} f(4k) = 4k \\ f(4k+1) = 1 \\ f(4k+2) = 4k+3 \\ f(4k+3) = 0 \end{cases}, \text{ где } k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$$

Возьмём $f(1) = 1$ как базу индукции. На общем случае $f(4m+1) = 1$. Рассмотрим побитовую операцию исключающего или. Составим рекурсивную формулу: $f(4m+2) = f(4m+1) \oplus 4m+2$, где $\oplus$ - оператор XOR. Тогда:

$f(4m+2) = f(4m+1) \oplus (4m+2) = 1 \oplus (4m+2)$. Видим, что $(4m+2) \vdots 2$, значит в двоичной записи последняя цифра числа $(4m+2)$ равна 0.

Тогда $f(4m+2) = 1 \oplus 4m+2 = 4m+3$.

Далее $f(4m+3) = f(4m+2) \oplus 4m+3 = (4m+3) \oplus (4m+3)$

Видим, что числа равные, значит совпадают и их двоичные записи. Тогда во всех разрядах останется 0. То есть:

$f(4m+3) = 0$

Далее $f(4m+4) = f(4m+3) \oplus (4m+4) = 0 \oplus (4m+4) = 4m+4$.

~~Таким образом,~~ И последний шаг:

$f(4m+5) = f(4(m+1)+1) = f(4m+4) \oplus (4m+5) = (4m+4) \oplus (4m+5)$.

Замечаем, что у этих двух чисел совпадает двоичная запись кроме последнего разряда. Значит, $f(4m+5) = 1$.

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} f(4m+1)=1 & (1)\\ f(4m+2)=4m+3 & (2)\\ f(4m+3)=0 & (3)\\ f(4m+4)=f(4(m+1))=4m+4=4(m+1) & (4)\end{cases}$$

V

Отлично, мы доказали зацикленность значений в функции $f(x)$. ~~Другими~~ Мы можем по данному $f(x)$ восстановить x. То есть мы научились выполнять точную интерполяцию функции $f(x)$.

~~Заметим~~

1) Теперь вернёмся к условию задачи. Понятно, что крошику нужно задать хотя бы 1 вопрос. Тогда пусть он спросит $n=4$. Тогда:

$y = x\cdot 16 + 2022\cdot 4 + 2022$. Заметим, что $16x \vdots 4$, $2022\cdot 4 \vdots 4$ и $2022 \equiv 2 \pmod 4$. Тогда $y \equiv 2 \pmod 4$

Значит, $f(y)=y+1$ из рав-ва (2). В таком случае, кролик знает $f(y)$ по ответу Алисы, т.е. может вычислить x по следующей формуле:

$$x\cdot 16 + 2022\cdot 4 + 2022 + 1 = f(y)$$

$$16x + 8088 + 2023 = f(y)$$

$$16x = f(y) - 10111$$

$$x = \frac{f(y)-10111}{16}$$

+ 10б

Итак, кролик сможет угадать число за 1 ход.

2) Заметим, что если вдруг получится так, что при любом n, которое говорит кролик, мы обращаемся к рав-ву (1) или (3), то кролик никогда не угадает x,

т.к. в значении функции не фигурирует значение аргумента. В то же время, если вдруг Кролик смог сделать остаток от деления выражения на 4 равным 2 или 4 (т.е. число чётно), то он всегда угадает X за 1 операцию. Таким образом, ~~нужно~~ чтобы Кролик не смог угадать, нужно сделать значение выражения всегда нечётным. Этого можно добиться тогда и только тогда, когда C - нечётное, т.к. если подставить $n \vdots 2$, то $(Xn^2 + Bn) \vdots 2$, значит результат той же чётности, что и C. (при условии, что $B \neq 0$. Если же $B = 0$, то $f(X \cdot n^2 + c) = f(Xn^2 + Bn + c)$. Тут аналогично, если вдруг X - чётное, то при любом n значение выражение той же чётности, что и C.

Значит, C всегда чётно.

Итак, Кролик сможет угадать X тогда и только тогда, когда $C \vdots 2$. (+) 15 б.

Задание №3

Обозначим каждого гостя за столом, как вершину графа, а наличие ребра между вершинами - дружбу между этими гостями. Тогда в задаче рассматривается двудольный граф на $2n$ вершин, по n в каждой доле, причём есть некоторые ограничения на установку ребра, сказанные в условии.

1) Человек может услышать свою загадку тогда и только тогда, когда он находится в компоненте связности с циклом. Действительно, рассмотрим ~~цикл~~ минимальный ~~зам~~ цикл в компоненте связности, тогда если k-ый человек сказал загадку по какому-то ребру, то вскоре она вновь дойдёт до него от другого человека по второму ребру.

Бланк ответов

Значит, в очень хорошем наборе вершин нет циклов. Более того, раз в очень хорошем наборе нельзя добавить хоть бы одну пару друзей, чтобы он оставался очень хорошим, то этот набор вершин является связным графом, в противном случае просто проведём ещё 1 ребро к свободному человеку (вершине), в которую нельзя попасть и граф останется без циклов. Таким образом, очень хороший набор вершин всегда связный. Итак, очень хороший набор вершин связный и не содержит циклов, т.е. это дерево. Как известно, в связном графе без циклов ~~рёб~~ на n вершин равно $n-1$ ребро.

Вернемся к условию. Нас спрашивают максимальное кол-во пар друзей среди $2n$ гостей, которые образуют очень хороший набор. По вышедоказанному, нужно просто посчитать кол-во рёбер в связном графе на $2n$ вершин. По вышедоказанному это равно $2n-1$. +

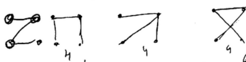
2) Если пришло 4 гостя, то каждый может дружить с каждым. Т.к. они образуют очень хороший набор, то нужно поставить равно 3 ребра.

Посчитаем все варианты:

1) Если нет „диагонали", то вар-та 4

2) Если „диагональ равно 1", то вар-та 4

3) Если „диагонали 2", то вар-та 4.



Если все образуют 1 большой „очень хороший набор", то вариантов 12.

~~Итак, всего вариантов 3·4 = 12~~.

−

~~Если 3 человека образуют „очень хороший набор"~~

Из условия непонятно, имеется в виду все наборы и поднаборы, либо имеется в виду, что все друзья образуют 1 очень хороший набор. Тогда кол-во различных наборов равно 12. (будем считать, что имеется в виду 1 большой очень хороший набор).

4) Составим рекуррентное соотношение для подсчета:

~~$f(n) = f(n-1) \cdot f(1) + 3 \cdot f(n-2) - f(2) + \dots +$~~

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 3 \cdot f(n-2) + 4 \cdot f(n-3) + 5 \cdot f(n-4).$$

Т.к. если мы берем компоненту связности на 2 меньше, то можем поставить её 2-мя способами, если на 4, то 3-мя способами и т.д.