ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802764070610

Титульный лист

Направление	■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11
Фамилия	НОСОВ
Имя	АНДРЕЙ
Отчество	ДМИТРИЕВИЧ
Дата рождения	01 02 2005
Город участия	НОВОСИБИРСК
Аудитория	5
Телефон	+79244344787
Дата	25 02 2023
Подпись	

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802764070610

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия НОВОСИБИРСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	25	02	00						
Балл члена жюри №2	00	25	02	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 027

Подпись члена жюри №1 Шв

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№2 Заметим, что

$f(4k)=4k$

$f(4k+1)=1$

$f(4k+2)=4k+3$

$f(4k+3)=0$, где $k\in\mathbb{N}$ (в таком случае $\exists f(0)=0$, но это не повлияет на решение)

Докажем это методом индукции. Для начала найдем базу: $f(1)=1$
$f(2)=3$
$f(3)=0$
$f(4)=1 \operatorname{xor} 2 \operatorname{xor} 3 \operatorname{xor} 4=4$

Также будем использовать для док-ва следующее: $f(x)=f(x-1) \operatorname{xor} x$
(Это доказывается просто расписыванием $f(x-1)=1 \operatorname{xor} 2 \operatorname{xor} \ldots \operatorname{xor} (x-1)$)

Пусть $f(4n)=4n$, Тогда
$f(4n+1)=1$
$f(4n+2)=4n+3$
$f(4n+3)=0$

~~$f(4n+4)=f(4(n+1))=$~~

$f(4(n+1))=f(4n+4)=f(4n+3) \operatorname{xor} (4n+4)=0 \operatorname{xor} (4n+4)=$
$=4n+4=4(n+1)$

$f(4(n+1)+1)=f(4n+5)=f(4n+4) \operatorname{xor} (4n+5)=(4n+4) \operatorname{xor} (4n+5)=$
$=1$, т.к. $4n+4 \vdots 2$

=> в двоичной записи на конце цифра „0" => $4n+5$ имеет ~~все те же~~ ту же запись в двоичном виде, кроме последней цифры (она заменена на „1", т.к. $(4n+5)=(4n+4)+1$)

$f(4(n+1)+2)=f(4n+6)=f(4n+5) \operatorname{xor} (4n+6)=1 \operatorname{xor} (4n+6)=$
$=4n+7=4(n+1)+3$

($1 \operatorname{xor} (4n+6)=4n+7$, т.к. у $4n+6$ последняя цифра „0" ($\vdots 2$), которая заменится на 1, что аналогично операции +1)

$f(4(n+1)+3)=f(4n+7)=f(4n+6) \operatorname{xor} (4n+7)=(4n+7) \operatorname{xor} (4n+7)=0$

По индукции доказано. +

1) Кролику достаточно назвать $n=2$, он получит $f(4x+2022\cdot 3)$

(+) 10б

$4x+2022\cdot 3 \underset{mod\,4}{\equiv} 2022\cdot 3 \underset{mod\,4}{\equiv} 2\cdot 3 \underset{mod\,4}{\equiv} 2$. Тогда $f(4x+2022\cdot 3) = 4x+2022\cdot 3+1$.

Чтобы получить x, достаточно вычислить $\frac{f(4x+2022\cdot 3)-2022\cdot 3-1}{4}$

Так он получит x за одну операцию. За ноль операций получить x нельзя, т.к. у Кролика не будет никакой информации

2) Заметим, что $f(4n+1)=1$ и $f(4n+3)=0$ не могут дать достаточно информации Кролику, т.к. с помощью этих операций он может только узнавать остаток от деления числа $(x\cdot n^2+Bn+C)$ на 4 (если $f=1$, то ост.$=1$, если $f=0$, то ост.$=3$).

~~Следовательно, Кролик~~ Однако чисел, дающих одинаковые остатки бесконечно $\Rightarrow$ Кролик не сможет узнать x, ~~используя~~ через $f(4n+1)$ и $f(4n+3)$

Рассмотрим $\underset{=4n}{f(4n)}$ и $\underset{=4n+3}{f(4n+2)}$. Иными словами рассмотрим четные $(x\cdot n^2+Bn+C)$.

~~Чтобы можно было отгадать любой x (четный или нечетн.),~~
~~нужно пользовать~~ Кролик по усл. знает B и C.

Рассмотрим C-нечетное, ~~тогда~~

1) Пусть B- четное, тогда мы не сможем свести $x\cdot n^2+Bn+C$ к четному числу при любых x (если, например x- четное)

2) Пусть B-нечетное, тогда мы не сможем свести $x\cdot n^2+Bn+C$ к четному при нечетном x (т.к. при $n\underset{2}{\equiv}1$

$\left.\begin{matrix} xn^2\text{ - неч} \\ Bn\text{ - неч} \\ C\text{ - неч}\end{matrix}\right\}$ неч.

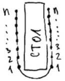
при $n\underset{2}{\equiv}0$

$\left.\begin{matrix} x\cdot n^2\text{ - чет} \\ Bn\text{ - чет} \\ C\text{ - неч}\end{matrix}\right\}$ неч.

Рассмотрим четное C, тогда Кролику достаточно сказать четное n и xn^2+Bn+C будет четным, а значит Кролик сможет найти x (при $n=2$, например, надо вычислить $(Bn+C)$ $\underset{mod\,4}{\equiv}$ и воспользоваться $f(4n)$

или $F(4n+2)$. Ответ: $B \in \mathbb{Z} \geq 0$
$C = 2l,\ l \in \mathbb{Z} \geq 0$ (+) 15 б

(N3) 1) Заметим, что чтобы человек, рассказовший ~~нужну~~ загадку, не услышал ее, нужно чтобы граф, в котором вершины — люди, а ребра — дружеские связи, не содержал циклов.
При кол-ве вершин $2n$ максимальное число ребер в таком графе $(2n-1)$. Пример: пусть в одной ~~первой~~ части стола все дружат с соседями справа и слева (если они есть) (это $n-1$ пар друзей).
Во второй части то же самое $(n-1)$ и ~~кто-то из одной~~ ~~час~~ человек с номером 1 в первой части дружит с номером 1 во второй части (еще 1 связь). Итого $n-1+n-1+1 = 2n-1$
Рисунок:



Ответ: $2n-1$

(+) 2 б

2) Рассмотрим кол-во пар друзей в таких наборах и число таких ~~количес~~ количеств пар.

	число пар	вариантов выбрать число пар
не очень хорошие	0	1
	1	$C_4^2 = 6$ (выбрать 2 друзей)
	2	~~6+6~~ (выбираем одну пару (6 сп.), затем либо соединяем оставшуюся, либо выбираем кого-то из двух и соединяем с кем-то из двух оставш. ~~Итого: $6(1+2\cdot2)=30$~~ $\frac{6(1+2\cdot2)}{2} = 15$ (делим на 2, т.к. повторно учитыв.
	3	могут быть варианты или непрерывн. линия (напр.) Итого $4 + \frac{4!}{2} = 16$

$\frac{4!}{2}$ - по модулю, т.к. на каждом шаге выбираем, куда пойти (4!) и делим на 2, т.к. обходы ~~с парой~~ в обратную сторону считаем второй раз. Больше 3 пар не может быть (подоказ. в (1))

Итого: 1+6+15+16= 38 Ответ: 38

№1 Заметим, что если число 1 в множестве белых, то оно может быть там ~~только~~ одним. В ином случае найдется $x>1$ белый, тогда $x+1$ - тоже белое, тогда $(x+1)+1=x+2$ - тоже белое и т.д. $\Rightarrow \exists x : \forall y \geq x$ y-белый. Это может быть только тогда, когда красных цветов нет (или оно одно), т.к. при наличии хотя бы двух множество красных будет пересекаться с белыми (возьмем ~~x~~ два наибольших красных числа, после которых все цветы белые, произведение красных будет больше каждого из них $\Rightarrow$ будет попадать в множество белых цветов). При этом одно красное возможно только если это 2, в ином случае найдется белое число между 1 и единств. красным $\Rightarrow$ все числа далее найденного будут белыми $\Rightarrow$ пересечение множеств красн. и бел. Таким образом, при белой „1" мы имеем конечное число раскрасок.

При красном „1" ~~…~~ и неединственном красном.

~~∀x(красного)~~ Бесконечное кол-во раскрасок подразумевает наличие красного номера большего какого-то числа (любого на выбор). При выборе такого числа ~~x~~ возьмем больше него красное X, нужно покрасить еще ~~…~~ $\left[\frac{X}{2}\right]$, чтобы нельзя было составить сумму $=X$. Но таким образом закрашиваются все числа в красный => Всего раскрасок конечно

—

Ответ: ~~конеч~~ не существует бесконечного кол-ва раскрасок

№3 $A=2$, т.к. берем сверху без двух нижних и снизу без двух верхних

$B=$

—