ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802842070489

Титульный лист

Направление	☒ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ДОРЖИЕВ

Имя БИЛИКТО

Отчество БАТОРОВИЧ

Дата рождения 15 09 2005

Город участия НОВОСИБИРСК

Аудитория N 5

Телефон 89644723297

Дата 25 02 2023 **Подпись** Билик

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802842070489

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия НОВОСИБИРСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	17	00	00						
Балл члена жюри №2	00	17	00	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 017

Подпись члена жюри №1 Шв

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1.

Для любого положительного целого числа существует ровно одна роза с таким номером. (по усл.). Королева хочет, чтобы сумма номеров любых двух белых роз соответствовала белой розе, а произведение номеров любых двух красных роз соответствовало красной розе. Должны быть и белые, и красные розы. Существует ли бесконечное количество раскрасок?

1) Сначала необходимо сказать, что роза с номером 1 обязательно должна быть красной, т.к. в противном случае все розы, начиная от 2-ой ~~красной~~ белой розы по порядку будут ~~красные~~ белые. Тогда ~~белые~~ красные розы не выполнят условие произведения.

2) Условию удовлетворяют красные розы: 1 и 2; 1 и 3; 1 и 4. $N=3$. Если 1 и 5 - красные, то 2 и 3 белые $2+3=5$ не удовл. условию.

Док-во, что другие варианты не подходят.
Если взять в пару с 1 число ≥ 5, то оно составит сумму номеров двух белых роз. Аналогично, если взять красными розы количество ≥ 3, то красная роза составит сумму номеров двух белых роз.
Получаем, так как по условию количество белых и красных роз по отдельности ≥ 2, то $N=3$.

Ответ: $N=3$.

Задание 2.

$y = xn^2 + 2022n + 2022$, $f(n) = 1 \operatorname{xor} 2 \operatorname{xor} 3 \dots \operatorname{xor} n$

1) Сначала по математической индукции необходимо доказать, что $f(n)$ - принимает значения $n, 1, n+1, 0$ в зависимости от остатка при делении n на 4.

1. База $f(4)=4$, $f(5)=1$, $f(6)=7$, $f(7)=0$

2. Предположение $f(4k)=4k$, $f(4k+1)=1$, $f(4k+2)=4k+3$, $f(4k+3)=0$, $k \in N$

3. Шаг индукции: $f(4K+4) = f(4K+3) \text{ xor } (4K+4) = 0 \text{ xor } (4K+4) = 4K+4$

$f(4K+5) = f(4K+4) \text{ xor } (4K+5) = (4K+4) \text{ xor } (4K+5) = 1$ (т.к. $4K+4$ - чётное число с 0 в последнем разряде двоичной записи, то $4K+5$ - имеет такую же двоичную запись но с 1 в последнем разряде)

$f(4K+6) = f(4K+5) \text{ xor } (4K+6) = 1 \text{ xor } (4K+6) = 4K+7$ (т.к. $4K+6$ - чётное число с 0 в последнем разряде двоичной записи)

10б

$f(4K+7) = f(4K+7) \text{ xor } (4K+7) = (4K+7) \text{ xor } (4K+7) = 0$.

Значит, $f(y)$ может принимать значения: $y, 1, y+1, 0$. (при остатках при делении на 4, соответственно от 0 до 3)

Р Стратегия: назвать $n=2$, ~~если $f(y) \neq 0$ и $f(y) \neq 1$, то~~ тогда $y = 4x + 6066$ - при делении на 4 - остаток 2.

Значит, $f(y) = y+1 = 4x + 6067$; $x = \frac{f(y)-6067}{4}$

(2) $f(xn^2+Bn+C)$, $y = xn^2+Bn+C$

1) Мы знаем из прошлого пункта, что, если $f(y) \equiv 1 \pmod 4$ или $f(y) \equiv 3 \pmod 4$, то мы не получаем никакой информации. Поэтому, если $C \equiv 1 \pmod 2$ и $B \equiv 0 \pmod 2$, то мы не можем узнать x за конечное число вопросов, так как если $x \equiv 0 \pmod 2$, то $f(y)$ будет 0 или 1.

7б. (+)

При всех остальных значениях B и C мы можем изменять остаток y при делении 4. Значит, можем найти x за конечное число вопросов. xn^2+n+1 ?

Итог: при $B \equiv 1 \pmod 2$ или $C \equiv 0 \pmod 2$)

Задание 3

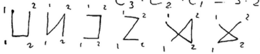
1. Какое максимальное кол-во пар друзей может быть среди $2n$ гостей, если они образуют очень - хороший набор?

Это значит, что гости - вершины ациклического ориентированного графа (т.к. загадка идёт только в одну сторону),

А дружба - это рёбра графа.
Максимально возможное количество рёбер в ацикличном ориентированном графе $2n-1$? при $2n$ вершинах −

Ответ: $2n-1$

2. кол-во очень хороших пар друзей при 4 гостях.
Чтобы посчитать рассмотрим кол-во способов выбрать первое ребро из 1-й вершины $C_3^1=3$ а также количество способов выбрать второе ~~вер~~ ребро из 2-ой вершины $C_2^1=2$ (т.к. осталось 2 вершины), кол-во способов выбрать 3-е ребро из 3-ей вершины $C_1^1=1$.
В итоге: $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (наборов очень хорош



. ! −

3. $f(n) = A \cdot f(n-1) + B \cdot f(n-2) + C \cdot f(n-3) + D \cdot f(n-4)$
−

4. Найти остаток от деления $f(256)$ на 10.
Так как $f(n) = \prod_{i=1}^{2n-1} i$, то $f(256) \approx 0 \pmod{10}$.

Задание 4. −

Алгоритм Алисы:
1. Обойти все города обходом в ширину, то есть из каждого нового города отдаляться от начала пути на одинаковое число рёбер.
2. Алиса должна нарисовать карту городов и найти ось симметрии.
3. Города, которые не лежат на оси симметрии и симметричны отн-но оси ~~являются~~ могут являться станциями.