ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802760452100

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия БОРИСОВ

Имя МИХАИЛ

Отчество СТАНИСЛАВОВИЧ

Дата рождения 05 09 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 425

Телефон 89221847990

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802760452100

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	06	20	05	00						
Балл члена жюри №2	06	20	05	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 031

Подпись члена жюри №1 [signature] **Подпись члена жюри №2** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1.

1) $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$; т.к. $2022 = n \cdot d$ ~~сумма~~ ~~неясно~~ (после выпивания пузырька рост уменьшается на фиксированное число d), где n - кол-во пузырьков (всего Алиса выпила n пузырьков), а d - число на которое уменьшается рост Алисы. n и d - целые следовательно они делители числа 2022.

$X_0, X_1, \dots, X_n$ - арифметическая прогрессия с разницей d.

в арифмет. прогрессии среднее арифмет $= \frac{X_i + X_{n-i}}{2}$ (i от 0 до n)

следовательно если нечёт количество чисел в прогрессии то среднее арифмет есть средний элемент ($X_{n/2}$).

Среднее арифмет $= 34$, но d - целое положительное и рост тоже положителен $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в такой прогрессии может быть максимум 67 чисел: если добавлять ещё числа, то либо $x_n < 1$ либо сред арифм > 34

67, 66, 65....... 34....... 3, 2, 1, при этом рост уменьшится на 66

но по условию рост уменьшился на 2022 $\Rightarrow$ нет таких пар (X_0, d)

Ответ: 0.

2) $n \cdot d = 232848$

$n \cdot d = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$

$\frac{X_0 + X_n}{2} = 20222022$

232848	4
58212	4
14553	3
4851	9
539	7
77	7
11	11
1	

т.к. рост изменился на 232848 а сред арифм. 20222022, то $X_n = 20222022 - \frac{232848}{2} > 0$

что значит пары (X_0, d) существуют.

количество способов выбрать $d = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$, потому что d - это какой-то делитель числа $232848 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ мы можем независимо взять $\underbrace{0,1,2,3,4}_{5 \text{ вариантов}}$ двойки, $\underbrace{0,1,2,3}_{4 \text{ варианта}}$ тройки $\underbrace{0,1,2}_{3 \text{ варианта}}$ - семёрки $\underbrace{0,1}_{2 \text{ варианта}}$ одинн.

Задание 1.

1) минимальный возможный рост Алисы в конце − 1.

~~То~~ среднее арифмет в арифмет прогрессии $x_0, x_1, \dots x_n$ можно вычислить по формуле $\frac{x_i + x_{n-i}}{2}$ (где i от 0 до n)

если $x_n = 1$; Тогда $x_0 = 67$, но в таком случае $2022 > 67$ и пар (x_0, d) удовлетвор. услов не существует.

Ответ: 0 ⊖

2) рост изменился на $232848 = n \cdot d = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$

232848	4
58212	4
14553	3
4851	9
539	7
77	7
11	11
1	

Тогда различных n существует $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ вариантов ✓

если n нечётное, тогда имеем арифметич прогрессию вида

$x_{n/2-1} = 20222022+d$ $x_{n/2} = 20222022$, $x_{n/2+1} = 20222022-d$ . . . . .

в таком случае все условия будут выполняться.

~~если~~ если n чётное тогда d #нечёт в противном случае среднее арифметическое не будет целым числом?

докажем этот факт возьмём элементы $x_{\frac{n-1}{2}}$ и $x_{\frac{n+1}{2}}$ это два средних соседних элемента $x_{\frac{n-1}{2}} - x_{\frac{n+1}{2}} = d$

их среднее арифмет есть среднее арифмет всей арифмет прогр (они удовлетворяют формуле из первого пункта)

$$\frac{d + x_{\frac{n+1}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}}{2} = \frac{d}{2} + x_{\frac{n+1}{2}}$$

но d − нечёт ⇒ сред арифм тоже нечёт.

$4 \cdot 3 \cdot 2$

нечётных n существует 24 ~~ш~~ варианта

одновременно чётных n и d существует $\underbrace{(120-24)}_{\text{количество чёт } n} - \underbrace{24}_{\text{количество нечёт } d} = 72$

$72 + 24 = 96$

Ответ: 96 ⊕

Задание 2.

распишем $f(n)$

$f(1)=1$
$f(2)=3$
$f(3)=0$
$f(4)=4$
$f(5)=1$
$f(6)=7$
$f(7)=0$

рассмотрим такой „блок" он начинается после того как $f(n)=0$ с чётного числа

для каких чисел это верно?

~~$f(x)=0 \Rightarrow f(x+1)=x+1$~~ соседние числа в двоичной системе отличаются только последним знаком $\Rightarrow$ xor таких чисел $=1$, затем xor 1 и чётного числа возвращает следующее (нечёт) число, а xor числа с самим собой $=0$, ~~такие блоки будут~~ таких блоков бесконечно много. Заметим что восстановить n зная $f(n)$ можно только если n - чётное, значит называть нечёт числа кролику не имеет смысла, потому что если загаданное число нечёт, то $x \cdot n^2$ нечёт, но $2022 \cdot n$ - чёт и 2018 чёт $\Rightarrow$ y будет нечёт и восстановить y по $f(y)$ невозможно.

Из вышесказанного можно придумать стратегию:

1) назвать любое чётное число   почему подойдёт?
2) по ответу можно восстановить y (если $f(y)$ чёт, то $y=f(y)$, если $f(y)$ нечёт, то $y=f(y)-1$ из наблюдений выше)
3) найти x по формуле

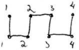
$$x=\frac{y-2018-2022\cdot n}{n^2}$$ (формула - из $y=x\cdot n^2+2022\cdot n+2018$ я выразил x.)

(+.)

Задание 3.

Из условия легко понять что зная пары друзей очень хорошего набора можно построить граф дерево; если же набор не является хорошим, то в графе будут циклы и он не будет деревом. Пример очень хорошего набора

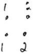
рёбра в графе - пара друзей



значит всего в очень хорошем наборе 2n-1 пара друзей
(в дереве n-1 рёбер где n - кол-во вершин)

① Ответ: $2n-1$ (±) почему нельзя больше?

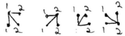
② если пришло 4 гостя то ~~у каждого~~

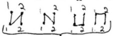


① либо ктото имеет 3 друзей 

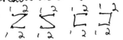
② либо двое имеют двух друзей 

~~③ либо ?~~

в первом варианте 4 случая 

во втором варианте 8 случаев 

и т.д. ~~и аналогично~~ ~~еще~~



всего 12 случаев (∓)

② Ответ: 12

при $n=3$  можно разбить на два независимых квадрата  тогда в левой части 12 вариантов и в правой тоже 12 всего 144 варианта.

③ Тогда из вышесказанного можно вывести ~~во~~ формулу 12^{n-1} Как совмещать половинки?

Тогда преобразуем рекурентную формулу

Бланк ответов

$12^{n-1} = a \cdot 12^{n-2} + b \cdot 12^{n-3} + c \cdot 12^{n-4} + d \cdot 12^{n-5}$

если $a=11$ $b=11$ $c=11$ $d=12$, тогда получим

$12^{n-1} = 11 \cdot 12^{n-2} + 11 \cdot 12^{n-3} + 11 \cdot 12^{n-4} + 12^{n-4} =$

$= 11 \cdot 12^{n-2} + 11 \cdot 12^{n-3} + 12^{n-3} =$

$= 11 \cdot 12^{n-2} + 12^{n-2} = 12^{n-1}$

(3) Ответ: $a=11$; $b=11$; $c=11$; $d=12$ ⊖

(4) $12^{8-1} \underset{1000}{\equiv} x$ найти x.

$12^7 \underset{1000}{\equiv} x$

$12^2 = 144$

$12^4 \underset{1000}{\equiv} 20736 \underset{1000}{\equiv} 736$

$12^3 \underset{1000}{\equiv} 1728 \underset{1000}{\equiv} 728$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 144 \\ \hline 576 \\ +576 \\ 144 \\ \hline 20736 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$12^7 \underset{1000}{\equiv} 728 \cdot 736 \underset{1000}{\equiv} 535808 \underset{1000}{\equiv} 808$

$$\begin{array}{r} 728 \\ \times 736 \\ \hline 4368 \\ 2184 \\ 5096 \\ \hline 535808 \end{array}$$

(4) Ответ: 808 ⊖