ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802700450786

Титульный лист

Направление
- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Фамилия ХАСАНОВ

Имя ДМИТРИЙ

Отчество ВАДИМОВИЧ

Дата рождения 31 01 2006

Город участия НИЖНИЙ ТАГИЛ

Аудитория 314

Телефон 79826933847

Дата 25 02 2023 **Подпись** Хal

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802700450786

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Город участия НИЖНИЙ ТАГИЛ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	25	02	03						
Балл члена жюри №2	20	25	02	03						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 050

Подпись члена жюри №1 Шаб

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№2

$f(4k)=4k$

Докажим, по индукции, что $f(4k+1)=1$, $f(4k+2)=4k+3$, $f(4k+3)=0$, $f(4k+4)=4k+4$:

БАЗА:

$f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=0$ и $f(4)=4$

Пусть для k данное утверждение верно, тогда докажим для $k+1$:

Если $f(4k)=4k$, то $f(4k+1)=1$, ведь $4k$-число делящееся на 4, значит последнии две цифры в его двоичной записи это 0, $4k+1$ -нечетное число, значит в последнем разряде будет стоять 1, а раз $4k+1$ на 1 больше, то их записи в двоичной системе счисления будут ~~со~~ совпадать за исключением последнего разряда, где у $4k$ будет 0, а у $4k+1$ – 1, а раз $f(4k+1)=f(4k)\ xor\ 4k+1$, то $f(4k+1)=1$. ✓

Если $f(4k+1)=1$, то $f(4k+2)=4k+3$, ведь $4k+2$ чётное, а у единицы значащие цыфры только в последнем разряде, где у $4k+2$ стоит 0, а значит $4k+2\ xor\ 1=4k+3=f(4k+2)$ ✓

Если $f(4k+2)=4k+3$, то $f(4k+3)=0$, ведь $4k+3\ xor\ 4k+3=0$ почему? ✓

Если $f(4k+3)=0$, то $f(4k+4)=4k+4$, ведь $4k+4\ xor\ 0=4k+4$. ✓

Значит наше предположение верно. ✓

Как можно это использовать?

Функция от числа делящегося на 4 равна ему же, а функция от числа делящегося на 2, но не на 4 ~~ра~~ на единицу больше самого числа.

В таком случае, если Кролик назовёт Алисе $n=2$ $\overset{\text{почему?}}{?}$, то $y = 4x + 6062$, это четное, но не делится на 4, а значит:

$$4x + 6063 = f(4x+6062)$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{f(4x+6062) - 6063}{4}$$

Вот так, за один вопрос, Кролик сможет отгадать задуманное число. ⊕

№1

1) Если её рост изменился на 2022, то

$\overset{\text{почему?}}{n \cdot d = 2022}$. $\frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1} = \frac{x_0 + (x_0 - d) + (x_0 - 2d) + \ldots + (x_0 - n \cdot d)}{n+1} =$

$= \frac{x_0 \cdot (n+1) - d \cdot (1+2+\ldots+n)}{n+1} = \frac{x_0(n+1) - d \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}}{n+1} =$

$= x_0 - \frac{dn}{2} = 34$, раз $dn = 2022$, то

$x_0 = \frac{2022}{2} + 34 = 1011 + 34 = 1045$ ✓

Но изначальный рост Алисы не может равняться 1045, ведь её изначальный рост должен был уменьшится на 2022 и тем не менее остатся положительным, но $1045 - 2022 < 0$. Значит кол-во пар (x_0, d) равно 0, ведь единственный возможный рост нам не подходит. ⊕

Бланк ответов

2) Из первого пункта мы знаем формулу для изначального роста Алисы:

$x_0 = \frac{dn}{2} + 20222022$ (Ведь 20222022 это ср. ариф. чисел для второй подзадачи; а $dn = 232848$) $\Rightarrow x_0 = \frac{232848}{2} + 20222022 =$
$= 116424 + 20222022 = 20338446$

Данный рост нам подходит, ведь
$20338446 - 232848 = 20105598 = x_n > 0$

Нам нужно найти кол-во пар (x_0, d), рост у нас единственен, а значит кол-во способов выбрать d и будет ответом в нашей задаче. Мы знаем, что $n \cdot d = 232848$ и то, что n и $d \in \mathbb{N}$, значит кол-во способов выбрать d это кол-во способов выбрать множитель у числа 232848. Кол-во натуральных множителей у числа ~~находится по формуле:~~ $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ находится по формуле $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k+1)$. Формула верна, ведь мы для каждого простого входящего в изначальное число, выбираем степень его вхождения в множитель (от 0 до α_i).

почему любой делитель не меняет среднее?

Если разложить 232848 на простые получим: $232848 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$, а значит кол-во его множителей, а вследствии и наш ответ это $- 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =$
$= 120$.

Ответ: 1) 0, 2) 120 (+.)

№4 (−.)

Из условия можно сделать вывод, что всё королевство обладает осевой симметрией, и одна из "долей" принадлежит Белому, а вторая – Чёрному.

Если мы уже знаем эту ось симметрии, то все симметричные пары городов, не лежащие на оси симметрии, могут быть столицами. почему?

Осталось придумать алгоритм для поиска оси симметрии, при условии, ~~то~~ что изначально мы были в любом городе.

Раз Алиса может запоминать любую информацию, то пусть она обойдёт каждую дорогу, соединяющую какие-то два ~~горо~~ города, и в уме представит схему королевства (как в примере в условии), обладая таким знанием мы можем перебрать всевозможные пары городов, задающие ось симметрии (прямую можно задать по двум точкам) и ~~если прямая и вправду является осью симметрии~~, проверить как? является ли она осью симметрии, благодаря плану королевства у неё в голове, если очередная прямая может быть осью симметрии, то мы с лёгкостью находим пары городов подходящие под критерий быть столицей. ?

Бланк ответов

№3

Заметим что, группа, в которой все знакомы, не может содержать более двух человек. Если она бы содержала хотя бы три человека, то первый мог бы рассказать историю второму, тот в свою очередь третьему и т.д., а последний первому, ведь первый не ему рассказывал эту историю, последний может ему её рассказать, значит максимум двое могут быть в такой группе.

Если выражатся в терминах графов, то люди будут вершинами, а рассказанные истории рёбрами, по ранее доказанному у нас не будет циклов.

1) Граф без циклов это дерево, а как мы знаем кол-во вершин в дереве на одну больше, чем кол-во рёбер; значит наибольшего кол-ва рёбер (друзей) ~~мы~~ при фиксированном кол-ве вершин, мы можем добиться если минимизировать кол-во деревьев. при n от 1 до 3 у нас может быть всего одно дерево, ведь мы можем от одного "дотянутся" до остальных, значит при n от 1 до 3, кол-во друзей

равняется $2n-1$.

В остальных случаях одним деревом явно не управится, ведь как бы не выбрав корень дерева, до некоторых он не сможет „дотянутся" ведь может дружить с граничащими по стороне или углу. Зато двумя деревьями мы явно управимся, например , идя по диагоналям мы сможем использовать только два дерева, а значит при $n \geq 4$ ответом является $\underline{2n-2}$.

 $2n-1$ ребро

2) ответ будет 4, ведь по написанному в первой подзадаче, при $n<4$ мы можем достигнуть ответа $2n-1$, использовав лишь одно дерево значит мы должны выбрать корень дерева (это можно 4 способами), а остальные просто будут с ним дружить. ⊖

Ответ: 1) при $1 \leq n \leq 3$ − $2n-1$, при $n \geq 4$ − $2n-2$

2) 4. ⊖