ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802419102005

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КОВАЛЕНКО

Имя ЕВГЕНИЙ

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 28 12 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 628

Телефон 89506569608

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802419102005

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	17	00	00						
Балл члена жюри №2	00	17	00	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 017

Подпись члена жюри №1 Шиф

Подпись члена жюри №2 Шад

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1. Рассмотрим нечётные раскраски для M_{pol}:
очевидна конструкция, в которой покрасить можно все ряды, имеющие нечётные номера (т.к. тогда произведение номеров любых красных ряд нечётно, сумма номеров любых белых чётно). Если все номера ряд нечётны и представлены простыми числами, то можно покрасить любое кол-во ряд в красный цвет (от 1 до $M-1$), суммы любых 2^x номеров белых ряд — чётное число, произведение любых 2^x номеров красных ряд — число составное. Ни чётных, ни составных чисел нет среди номеров ряд, значит, нет такой раскраски, которая не устроила бы королеву. Аналогично, нет такой раскраски для номеров ряд M_i таких, что НОД $(M_1; M_2; \dots; M_m)=1$, т.е. все номера взаимно просты. Это можно обобщить условием: есть хотя бы N=1 раскраска, которая не устраивает королеву, если среди номеров $\{M_i\}$ найдутся такие числа $i, j, k \in [1; M]$, $i, j, k \in \mathbb{Z}$, что $M_i = M_j \cdot M_k$ (тогда ряды j и k красим, а i-ые красим — королеву не устроит) или $M_i = M_j + M_k$ (тогда ряд i красим, а ряды j и k — нет — королеву не устроит). Примеры: 2, 4, 8 — не устроит королеву; 5, 6, 11 — не устроит
К К Б ... Б Б К ?

Однако если $M_i = 1$, а среди элементов последовательности $\{M_1; \dots; M_{i-1}; M_{i+1}; \dots; M_m\}$ нет таких элементов M_j, M_e, M_k, что $M_j = 1 + M_k$, или $M_j = M_e \cdot M_k$, то королеву устраивают все раскраски (потому что в красный цвет нельзя покрасить элементы M_i и M_j так, что M_j окажется белым, все ряды имеют разные номера).

№2. 1) Заметим несколько интересных фактов для любого $k \in \mathbb{N}$:
1) $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=0$, $f(4)=0 \text{ xor } 4 = 4$; $00_2 \text{ xor } 100_2$
2) $f(4k+1)=1$ (Б.И.: $f(1)=1$; пусть $f(4k-3)=1$, тогда $f(4k-2)=(4k-2) \text{ xor } 1$
$4k-2$ — чётное $\Rightarrow$ в 2-ичной системе счисления заканчивается на $0 \Rightarrow$
все биты кроме последнего справа не изменяются $\Rightarrow f(4k-2)=4k-1$,
$f(4k-1)=(4k-1) \text{ xor } (4k-1)$ — все биты совпадут $\Rightarrow f(4k-1)=0$, $f(4k)=0 \text{ xor } (4k)$ —
нулевые биты останутся нулевыми, единичные — единичными $\Rightarrow f(4k)=4k$,

$f(4k+1)=(4k)\ xor\ (4k+1)-4k$ различаются на оба 2-ичной СС, $4k+1$ — на 1 в 2-ичной СС, остальные биты совпадут $\Rightarrow f(4k+1)=1$ — доказали). Тогда получаем, что для $k\in N$ верна система:

$$\begin{cases} f(4k)=4k \\ f(4k+1)=1 \\ f(4k+2)=4k+3 \\ f(4k+3)=0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что кролику достаточно угадать Алисе такое число, что $(xn^2+2022n+2022)\vdots 4$, ведь тогда Алиса назовёт число $xn^2+2022n+2022$, или число n такое, что $xn^2+2022n+2022\equiv 2 \pmod 4$, ведь тогда Алиса назовёт число $xn^2+2022n+2023$.

Кролик однозначно определит x, зная n. Пусть кролик называет чётное число $n=2m$, тогда $y=4xm^2+1011\cdot 4m+2\cdot 1011\equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow$ Алиса назовёт число $f(y)=xn^2+2022n+2023 \Rightarrow$ кролик угадает число x с первого вопроса, где $x=\frac{f(y)-2023-2022n}{n^2}$. (+) 10б.

2) Кролик не угадает число за конечное число запросов, если $\forall n$ $y\equiv 1 \pmod 2$, ведь тогда $f(y)=0$ или $f(y)=1$, кролик не сможет однозначно восстановить число x. По стратегии из п.(1) кролик будет называть чётные n, значит, для числа $y=xn^2+Bn+C$ (±) 7б.

$y\vdots 2 \Rightarrow \boxed{B\in N,\ C\in N,\ C\vdots 2}$ — при таких условиях кролик однозначно угадает x.

№3. 1) Максимальное кол-во пар друзей в целом — n. По условию не все создания гостя с номером x связаны с ним дружбой $\Rightarrow$ выполнена

такая ситуация, что все гости с номерами x дружат только между собой и ни с кем другим. Выполняя "обмен" друзей. Если в целом пару друзей добавить невозможно, то такой набор всё равно остаётся очень хорошим. Если $n=1$, то такой набор всего один, состоит из одной пары. (−)

Максимальное кол-во пар в очень хорошем наборе — $\boxed{n(n+1)}$.

2) По т. Мирского и т. Дилуорса (для понятий "цепь" — кол-во очень хороших наборов пар друзей, "цепь" — максимальное кол-во друзей в очень хорошем наборе) кол-во очень хороших пар друзей равно $\frac{n(n+1)}{2}$. (−)

Пример: $2n=4$ гостя $\Rightarrow n=2 \Rightarrow$ ответ: 3.

3) $f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$, $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=\frac{3\cdot 4}{2}=6$, $f(4)=\frac{4\cdot 5}{2}=10$, $f(5)=\frac{5\cdot 6}{2}=15$, $f(6)=\frac{6\cdot 7}{2}=21$, $f(7)=\frac{7\cdot 8}{2}=28$, $f(8)=\frac{8\cdot 9}{2}=36$, $f(9)=\frac{9\cdot 10}{2}=45$.

Бланк ответов

Составим систему уравнений $f(n) = Af(n-1) + Bf(n-2) + Cf(n-3) + Df(n-4)$:

$$\begin{cases} f(5) = Af(4) + Bf(3) + Cf(2) + Df(1) \\ f(6) = Af(5) + Bf(4) + Cf(3) + Df(2) \\ f(7) = Af(6) + Bf(5) + Cf(4) + Df(3) \\ f(8) = Af(7) + Bf(6) + Cf(5) + Df(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = A\cdot 10 + B\cdot 6 + C\cdot 3 + D\cdot 1 & (1) \\ 21 = A\cdot 15 + B\cdot 10 + C\cdot 6 + D\cdot 3 & (2) \\ 28 = A\cdot 21 + B\cdot 15 + C\cdot 10 + B\cdot 6 & (3) \\ 36 = A\cdot 28 + B\cdot 21 + C\cdot 15 + D\cdot 10 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 15 = 10A + 6B + 3C + D \to D = 15 - 10A - 6B - 3C \\ 21 = 15A + 10B + 6C + 3D \to 21 = 15A + 10B + 6C + 45 - 30A - 18B - 9C \Rightarrow 24 - 15A - 8B - 3C = 0 \\ 28 = 21A + 15B + 10C + 6D \to 28 = 21A + 15B + 10C + 90 - 60A - 36B - 18C \Rightarrow 62 - 39A - 21B - 8C = 0 \\ 36 = 28A + 21B + 15C + 10D \end{cases}$$

$(2): 24 - 15A - 8B - 3C = 0 \Rightarrow 3C = 24 - 15A - 8B$; $(3): 186 - 117A - 63B - 24C = 0 \Rightarrow$

$186 - 117A - 63B - 192 + 120A + 64B = 0 \Rightarrow 6 = 3A + B \Rightarrow B = 6 - 3A \Rightarrow C = 8 - 5A - \frac{8\cdot 3}{3}(2-A) =$

$= 8 - 5A - 16 + 8A \Rightarrow C = 3A - 8$, $D = 15 - 10A - 6B - 3C = 15 - 10A - 36 + 18A - 9A + 24 \Rightarrow D = 3 - A$

~~(4) $36 = 28A + 21B + 15C + 10D = 28A + 126 - 63A + 45A - 120 + 30 - 10A \Rightarrow D = 6A$~~

$f(9) = Af(8) + Bf(7) + Cf(6) + Df(5) \Rightarrow 45 = 36A + 28(6-3A) + 21(3A-8) + 15(3-A) \Rightarrow$

$0 = 0$. Тогда:

$\begin{cases} B = 6 - 3A \\ C = 3A - 8 \\ D = 3 - A \end{cases}$, где $A \in \mathbb{N}$, например $A = 12$, $B = -30$, $C = 28$, $D = -9$.

4) $f(256) = \frac{256\cdot 257}{2} = 128\cdot 257 \equiv 8\cdot 7 \pmod{10} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow$

$f(256)$ даёт остаток 6 при делении на 10.

Бланк ответов