ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802286159147

Титульный лист

Направление	■ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ДОСТОВАЛОВ

Имя ДМИТРИЙ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 07 05 2005

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 349

Телефон 89227517744

Дата 25 02 2023 **Подпись** Дост

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802286159147

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	15	06	00						
Балл члена жюри №2	25	15	06	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 046

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

Ответ: да

1) Давайте выберем случайное простое число p, все розы с номерами кратными p покрасим в белый, тогда сумма номеров 2-х б. роз тоже будет кратна p $\Rightarrow$ роза с номером равным сумме номеров будет белой, при этом „белые" номера нельзя получить произведением „красных", т.к. б. номер кратен p $\Rightarrow$ один из множителей тоже будет кратен p (т.к. p — простое) $\Rightarrow$ два множителя не могут быть красными.

2) Таким образом, мы получим, что для каждого простого p существует ~~расскраска~~ раскраска, удовлетворяющая условию (б. число + б. число = б. число; кр. число · кр. число $\neq$ б. число, то есть кр. число · кр. число = кр. число) $\Rightarrow$ число раскрасок сопоставимо числу простых чисел $\Rightarrow$ их бесконечно много. ⊕

Задание 2 0) $f(n+1) = f(n) \operatorname{xor} (n+1)$

1) Рассмотрим функцию $f(n)$:

$f(1)=1$
$f(2)=3$
$f(3)=0$
$f(4)=4$
$f(5)=1$
$f(6)=2$
$f(7)=0$
$\vdots$

Заметим, что значения функции цикличны, а именно

для $n \overset{4}{\equiv} 3$ $f(n)=0$
для $n \overset{4}{\equiv} 0$ $f(n)=n$
для $n \overset{4}{\equiv} 1$ $f(n)=1$
для $n \overset{4}{\equiv} 2$ $f(n)=n+1$ (*)

($\overset{4}{\equiv}$ означает сравнение чисел по модулю 4)

Докажем это по индукции.

В качестве базы я выписал f для первых 7-х чисел и это работает, пусть у нас есть некоторое число $n \overset{4}{\equiv} 3$ и $f(n)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(n+1) = n+1$ $(n+1 \overset{4}{\equiv} 0)$, т.к. $\underbrace{\operatorname{Xor}(1;n)}_{0} \operatorname{xor} (n+1) = n+1$ $(n+1 \overset{4}{\equiv} 0)$, и при этом, заметим, что $n+1$ — чётное $\Rightarrow$ $n+2$ — нечёт $\Rightarrow$ оно будет отличаться от $n+1$ последним битом (~~[illegible]~~ знаком) $\Rightarrow$ $n+1$ имеет вид $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_k0}_2$ (чётное $\rightarrow$ посл. бит $=0$), $n+2$ имеет вид $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_k1}_2$ $\Rightarrow f(n+2) = (n+1) \operatorname{xor} (n+2) = 1$ $(n+2 \overset{4}{\equiv} 1)$ $\Rightarrow f(n+3) = (n+3) \operatorname{xor} 1 = n+4$ $(n+3 \overset{4}{\equiv} 2)$ $\Rightarrow f(n+4) = (n+4) \operatorname{xor} (n+4) = 0$ ✓

Продолжение на развороте

Продолжение Задачи 2

Мы получили, что если число $n \overset{4}{\equiv} 3$ и $y(n)=0$, то

$f(n+1) = n+1$

$f(n+2) = 1$

$f(n+3) = n+4$, а $n+4 \overset{4}{\equiv} 3$, $y(n+4)=0$ $\Rightarrow$ все числа будут получены таким же образом, причём

$f(n+4) = 0$

для $n=3$ $\quad n \overset{4}{\equiv} 3$, $y(n)=0$ $\Rightarrow$ все числа удовлетворяют условию (*) ✓

Тогда пусть кролик назовёт $n=2$ $\Rightarrow y = 4x + 6066 \overset{4}{\equiv} 2 \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$f(y) = y+1 \Rightarrow$ Алиса назовёт число равное $y+1 \Rightarrow$

Кролик узнает число y + он знает n $\Big| \Rightarrow$ он решит уравнение $y = xn^2 + 2022n + 2022$ и найдёт x, как $\underline{x = \dfrac{y - 2022n - 2022}{n^2}}$ ⊕

За 1 действие, очевидно, что за ноль вопросов найти x невозможно

Б) Чтобы кролик нашёл x, то должно выполняться следующее усл:

$\forall x \ \exists n: \left[\begin{array}{l} xn^2 + Bn + C \overset{4}{\equiv} 0 \\ xn^2 + Bn + C \overset{4}{\equiv} 2 \end{array}\right.$, чтобы кролик мог получить y, в противном случае Алиса будет называть только $\underline{0 \text{ и } 1}$ ✓

1) Пусть $x \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow$ <u>B может быть любым,</u>? а $\left[\begin{array}{l} C \overset{4}{\equiv} 0 \\ C \overset{4}{\equiv} 2 \end{array}\right.$

2) Рассмотрим случай: $C \overset{4}{\equiv} 1$

$C \overset{4}{\equiv} 1 \quad B \overset{4}{\equiv} 0 \quad x \overset{4}{\equiv} 0$ невозможно ни при каких n почему?

$C \overset{4}{\equiv} 1 \quad B \overset{4}{\equiv} 1 \quad x \overset{4}{\equiv} 1$ невозможно ни при каких n почему?

$C \overset{4}{\equiv} 1 \quad B \overset{4}{\equiv} 2 \quad x \overset{4}{\equiv} 2$ ~~нев~~ —//— —//—

$C \overset{4}{\equiv} 1 \quad B \overset{4}{\equiv} 3 \quad x \overset{4}{\equiv} 3$ —//— —//—

$\Rightarrow C \overset{4}{\not\equiv} 1$, т.к. существуют x, при которых нет нужных n

3) Рассмотрим случай $C \overset{4}{\equiv} 3$

$C \overset{4}{\equiv} 3 \quad B \overset{4}{\equiv} 0 \quad x=0$ —//—

$C \overset{4}{\equiv} 3 \quad B \overset{4}{\equiv} 1 \quad x=1$

$C \overset{4}{\equiv} 3 \quad B \overset{4}{\equiv} 2 \quad x \equiv 2$

$C \overset{4}{\equiv} 3 \quad B \equiv 3 \quad x \equiv 3$

$\Rightarrow C \overset{4}{\not\equiv} 3$

Мы получили, что у Кролика будет решение $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C \overset{4}{\equiv} 0 \\ C \overset{4}{\equiv} 2 \end{array}\right.$; B – любое

Ответ: B – любое; $C \overset{4}{\equiv} 0$ или $C \overset{4}{\equiv} 2$, другими словами:

$$\left[\begin{array}{l} C = 4k,\ k \in \mathbb{Z} \\ C = 4l+2,\ l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$ ⊖

Задание 3

1) Если представить гостей (узлы) и их дружбу (связи/рёбра) как неориентированный граф, то условие о том, что ни к какому человеку не придёт его же ~~жуткие~~ загадка говорит о том, что в графе нет циклов, а раз у нас ацикличестий (связный) неориентированный граф, то у нас дерево => связей будет $2n-1$. Предположим, что он не связный, тогда либо какой-то узел, либо ~~целое как~~ множество будет отделено от другого множества, ~~притом мы можем провести между ними ребро, оно будет единственным между~~ но тогда мы можем провести между ними ребро => набор не был очень хорошим

Ответ 1: $2n-1$ ⊕

2) Пусть гости будут называться так

Рассмотрим 4 случая.

$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$

① 1 и 3 связаны; 2 и 4 нет

будет всего 4 набора

(⊏; ⊼; ⊻; ⊠)

① 1 и 3 связаны; 2 и 4 тоже

будет 4 набора

(И; N; П; U)

③ 1 и 3 не связаны; 2 и 4 связаны

будет 4 набора, аналогичные ①

④ 1 и 3 не связаны, 2 и 4 не связаны

почему только эти случаи?

будет 4 набора

(Х; Ⴟ; Z; Σ)

=> для $2n=4$ всего $\boxed{16}$ очень хороших наборов

Ответ 2: 16 ±

Продолжение на развороте.

Продолжение задания 3.

3) Рассмотрим $f(n)$, также заметим, что очень хороший набор для $n > 2$ — Связный граф.

Пусть у нас были наборы $f(n-1)$

Расмотрим 2 случая: 1) вершины n-n соединены
2) вершины n-n не соединены.

M

1 $\dots\dots n\text{-}1 \quad n$
$\dots\dots n\text{-}1 \quad n$

случайный набор из $f(n-1)$

Заметим, что n-n мы должны связать с набором M, при этом мы не можем:
- соединить 2 вершины 'n' с одной вершиной 'n-1' т.к получится цикл
- соединить 2 вершины 'n' с двумя вершинами 'n-1', т.к. до прибавления n-n граф был связный $\Rightarrow$ был путь из одной вершины 'n-1' в другую 'n-1', а теперь появится второй через вершины 'n' $\Rightarrow$ образуется цикл $\Big| \Rightarrow$ из звена n-n только 1 узел может быть связан с M, тогда всего 4 способа это сделать

$\Rightarrow f(n)$, имеющих связь n-n всего $4 \cdot f(n-1)$

2 M $\dots\dots n\text{-}1 \quad n$
$\dots\ n\text{-}1 \quad n$

Заметим, что связать обе точки 'n' можно с M 4 способами: $\Rightarrow$

A, B — тоже способ, если A и B не лежали в одной компоненте связности

$\Rightarrow f(n)$, не имеющих связь n-n всего $4 \cdot f(n-1)$

$\Big| \Rightarrow f(n) = 4f(n-1) + 4f(n-1) = 8f(n-1)$ для $n > 2$

$\Rightarrow f(n) = 8f(n-1) + 0\,f(n-2) + 0\,f(n-3) + 0\,f(n-4)$

т.к в формуле есть $f(n-4) \Rightarrow n > 3 \Rightarrow$ наше усл. $(n > 2)$ выполняется $\Rightarrow$ формула верна

Ответ: $A = 8$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 0$ ⊖

4) Из формулы следует: $f(1) = 1$ $f(2) = 16$ $f(3) = \cancel{256}$ 128 ...

Продолжение на следующем листе.

Продолжение 2 Задания 3.

$f(1) \overset{10}{\equiv} 1 \quad f(2) \overset{10}{\equiv} 6 \quad f(3) \overset{10}{\equiv} 8 \quad f(4) \overset{10}{\equiv} 4 \quad f(5) \equiv 2 \quad f(6) \overset{10}{\equiv} 6$

Т.к. каждый следующий элемент является элементом геом. прогрессии, их остатки будут находиться в цикле с периодом 4 и с предциклом 1 => ~~f(256)~~ ≡ ~~f((256-1) mod 4)~~

~~$256 \overset{4}{\equiv} 1$ => f(256) будет~~

$(256-1) \bmod 4 = 3$ => $f(256)$ соответствует 3 элементу цикла =>

=> $f(256) \overset{10}{\equiv} f(4) \overset{10}{\equiv} 4$

Ответ: $\boxed{4}$

Задание 4

1) Начнём обход так, что мы не будем заходить в уже посещённые города, тогда рано или поздно Алиса пересечёт границу, т.к. города – деревья без циклов, при этом со второй стороны –//– она дойдёт до границы второй раз и тогда она увидит уже впереди 1 из посещённых городов => она сделает круг, при этом