ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802714096241

Титульный лист

Направление	☒ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия РЯЗАНОВ

Имя РОМАН

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 13 09 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 532

Телефон +79058025697

Дата 25 02 2023 **Подпись** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2602714096241

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	25	02	00						
Балл члена жюри №2	25	25	02	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 052

Подпись члена жюри №1 Шта

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

Опишем алгоритм, который получает на вход целое положительное число n и выдаёт уникальную раскраску (при различных n подоваемых на вход, алгоритм выдаёт различные рассраски).

Алгоритм:

1) красит все розы в красный цвет

2) красит розу с номером p_n (p_n – n^{+1} простое число) в белый цвет
$p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$

3) красит розы с номерами кратными p_n в белый цвет

Обоснование корректности:

• Евклид доказал, что простых чисел бесконечно много

• Если перемножить номера 2-х красных роз не получится номер белой (т.к. все номера красных $\not\vdots\, p_n$, а все номера белых $\vdots\, p_n$)

• Если сложить номера 2-х белых роз не получится номера красной (т.к. все номера белых $\vdots\, p_n$, а все номера красных $\not\vdots\, p_n$)

• Все розы будут покрашенны, т.к. все числа (целые положительные) можно разделить на кратные p_n (они белые) и не кратные p_n (они красные)

Ответ: не существует такого N, т.к. для $\forall N$ можно запустить алгоритм для $n = 1 \ldots N$ и получить N различных раскрасок.

(+) 25 б.

Задание 3

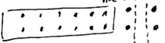
Подзадача 3)

$A = 8$, $B = 32$? А почему C и $Д = 0$?

Найдём C и $Д$. $C = 0$ и $Д = 0$, т.к.

$f(n) = 8f(n-1) + 32f(n-2)$ - достаточно; т.к.

Почему?



все варианты рёбер проходящие через последний промежуток уже перебраны, через него должно проходить хотя бы 1 ребро, т.к. дерево связное, через него не могут проходить 4 ребра, т.к. тогда — цикл. А варианты 2 и 3 ребра все есть в пункте 2 и все рассмотрены в пункте 3.

?

Ответ: $A = 8$
$Д = 32$
$C = Д = 0$.

$\ominus$

Подзадача 4)

$f(1) = 1$ $f(2) = 16$

$| -1$

$\boxed{\text{Задание 2}}$ $\oplus$ – операция xor

Функция $f(n)$ обладает свойством:

1) $n \bmod 4 = 0 \Rightarrow f(n) = n$
2) $n \bmod 4 = 1 \Rightarrow f(n) = 1$
3) $n \bmod 4 = 2 \Rightarrow f(n) = n+1$
4) $n \bmod 4 = 3 \Rightarrow f(n) = 0$

Докажем по математической индукции:

Шаг индукции:

1) Пусть $n \bmod 4 = 0$ и $f(n) = n = \boxed{n/4}00_2$

$f(n+1) = f(n) \oplus (n+1) = \boxed{n/4}00_2 \oplus \boxed{n/4}01_2 = 1$

2) Пусть $n \bmod 4 = 1$ и $f(n) = 1 = 1_2$

$f(n+1) = f(n) \oplus (n+1) = 1_2 \oplus \boxed{(n-1)/4}10_2 = \boxed{(n-1)/4}11_2 = n+2 = (n+1)+1$

3) Пусть $n \bmod 4 = 2$ и $f(n) = n+1$

$f(n+1) = f(n) \oplus (n+1) = \boxed{(n-2)/4}11_2 \oplus \boxed{(n-2)/4}11_2 = 0$

4) Пусть $n \bmod 4 = 3$ и $f(n) = 0$

$f(n+1) = f(n) \oplus (n+1) = 0 \oplus (n+1) = n+1$

База индукции:

$f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$, $f(5) = 1$, $f(6) = 7$

Подзадача 1) Белый кролик может загадать $n = 2$, тогда

$y = x \cdot 2^2 + 2022 \cdot 2 + 2022 = \underset{\vdots 4}{4x} + \underset{\vdots 2,\ \not\vdots 4}{6066}$

$\Downarrow$

$y \bmod 4 = 2$

$\Downarrow$

$f(y) = y+1$

$y = f(y) - 1$

$4x + 6066 = f(y) - 1$

$x = \dfrac{f(y) - 6067}{4}$ (кролик отгадал x с 1 попытки)

Ответ: за 1 шаг.

Задание 2

Подзадача 2)

$y = x \cdot n^2 + B \cdot n + C$

~~Если среди B и C есть чётные, то Если~~

1) Если B и C - нечётные, то если Алиса загадает нечётное x, то $y \bmod 4 = 1$ или 3, и $f(y) = 0$ или 1 и кролик не сможет отгадать x.

(+) 25 б.

обоснование, что $(y \bmod 4) = 1$ или 3:

$x \cdot n^2 + B \cdot n = n(B + nx)$

n - чёт: чёт. $\cdot$ (нечёт. + чёт. $\cdot$ нечёт.) = чёт.

n - нечёт: $\text{нечёт}(\underbrace{\text{нечёт} + \text{нечёт}\cdot\text{нечёт}}_{\text{чёт}}) = \text{чёт}$

$(x \cdot n^2 + B \cdot n) + C =$ чёт + нечёт. = нечёт.

2) Если B - чёт, а C - нечёт, то если Алиса загадала чётный x

$y = x \cdot n^2 + B \cdot n + C =$ чёт $\cdot n^2 +$ чёт $\cdot n$ + нечёт = нечёт

$\Downarrow$

$y \bmod 4 = 1$ или 3 $\Rightarrow$ кролик не отгадает x.

3) Если C - чётное: кролик может загадывать чётные числа n, причём либо все $n \bmod 4 = 2$, либо все $n \bmod 4 = 0$.

Тогда $y = x \cdot n^2 + B \cdot n + C \bmod 4 = 0$ или 2 $\Rightarrow$ $f(y) = y$ или $y+1$

а т.к. кролик загадывает числа дающие одинаковый остаток по $\bmod 4$ (либо 0 либо 2), то $y \bmod 4 = const$ и $f(y)$ либо всегда $= y$, либо всегда $= y+1$, кролик составит систему уравнений (линейных) и найдёт x.

Ответ: C - должно быть чётным.

Задание 3

Сведё задачу к задаче на графе.

Дан граф с 2n вершин (вершины - гости). n-синих вершин n-красных (синие и красные сидят по разные стороны стола)

синие и красные вершины пронумерованы от 1 до n (номер гостя и его вершины совпадают).

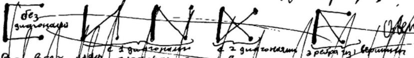
<u>Хороший</u> набор - лес (граф из 1 или нескольких несвязных деревьев), т.к. если в графе появится цикл, то по нему загадка может попасть к составителю этой загадки, а граф без циклов - лес.

<u>Очень хороший</u> набор - дерево, т.к. если в дерево добавить ещё хотя бы 1 ~~вершину, то~~ ребро, то появится цикл.

<u>Подзадача 1)</u> В дереве с m вершинами имеем m-1 ребро. <u>Очень хороший</u> набор - дерево => в нём 2n-1 ~~пара~~ ребро (пара друзей)

Ответ: 2n-1. (+) 2б

<u>Подзадача 2)</u> В граф ~~с~~ 4 гостями будет 3 ребра, ?



Ответ: 20.

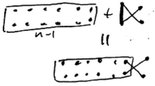
Во всех ~~этих~~ графах если вершины расположить по углам квадрата будет хотя бы 1 ребро совпадающее со стороной, т.к. также могут быть рёбра совпадающие с диагоналями, но таких всего 2.

Всего 5 ~~вариантов~~, причём каждый можно 3 раза повернуть на 90° и получить новый => всего 5·4=20 вариантов

Задание 3

Подзадача 3) Определим коэффициент A.

Воспользуемся 2 подзадачей, вместо выделенного (также остальных) ребра можно подставить 2 крайние вершины графа с 2(n-1) вершинами => A = 8

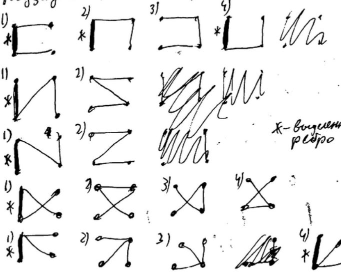


~~т.к. добавляется ещё 1 вариант~~

~~т.к. в случае с 4 составл. он получался из~~

~~Определим B~~

Подзадача 2)



Расположим вершины графа в углах квадрата

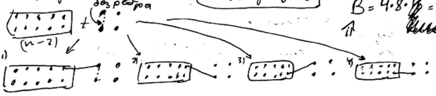
* – выделенное ребро

16 вариантов

Ответ: 16.

Определим B: (Подзадача 3)

без ребра



кол-во из п.2 без жирных рёбер

$B = 4 \cdot 8 \cdot \cancel{1} = 32$