ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802350068071

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ИСЛАМОВА

Имя КАМИЛЯ

Отчество АЙДАРОВНА

Дата рождения 03 09 2005

Город участия ИЖЕВСК

Аудитория 4

Телефон 89128782495

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802350068071

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ИЖЕВСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов | Количество черновиков к проверке

Время выхода с 12:08 до 12:11

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	24	00	06	00						
Балл члена жюри №2	24	00	06	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 030

Подпись члена жюри №1 | **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задача 1

Да существует. Давайте докажем, что $\exists$ бесконечное кол-во простых чисел. Предположим, это не так. Тогда пусть все простые числа: $p_1, p_2 \dots p_n$. Возьмем $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$ и заметим, что оно не делится ни на одно из p_i. Тогда или существуют еще p, или это число простое – противоречие.

Теперь докажем, что $\exists \infty$ кол-во раскрасок. Возьмем простое число p и покрасим все числа pn, где $n \in \mathbb{N}$ в белый. Тогда для любых белых роз будет выполняться данное условие, т.к. $xp + yp = (x+y)p$, где $x, y \in \mathbb{N}$, а $(x+y)p$ мы также покрасим в белый. Остальные розы будут красными. Заметим, что и для них выполняется условие.

$\begin{cases} x \times y, \text{ где } x, y - \text{красные розы и } x, y \not\vdots\, p \\ = z, \text{ где } z - \text{красная роза, т.к. } z \not\vdots\, p \end{cases}$ почему?

Заметим, что простых чисел у нас бесконечно много $\Rightarrow$ раскрасок так же бесконечно много ±

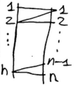
Задача 3

1. максимальное кол-во пар друзей для 2n гостей = 2n−1. Построим граф, где вершины - гости, а ребра - дружба. Заметим, что набор не может стать хорошим, если в нем есть цикл на $n \geq 3$ (т.е. любой). Предположим, что цикл есть в хорошем наборе и посмотрим на него: (возьмем цикл минимальной длины)

Предположим, что гость а узнает новую загадку. Тогда, по условию, эта загадка будет рассказываться всем друзьям, т.е. будет переходить по ребрам, кроме от того вершины, откуда эта загадка пришла. Предположим, в какой-то момент загадка не пошла дальше по циклу. ~~Тогда до этой вершины загадка уже дошла~~ Тогда следующая вершина только что рассказала загадку предыдущей, т.е. произошла такая ситуация. Тогда, мы нашли цикл, или равный исходному, (Тогда он противоречит условию хорошего графа), или нашли цикл меньше исходного, что невозможно, т.к. мы взяли цикл min длины. Теперь рассмотрим случай, когда мы ~~проходим~~ проходим по всем ~~из~~ ребрам. Тогда эта загадка доходит до человека а, что противоречит условиям хорошего набора ⇒ хороший граф не содержит цикла. Тогда в нем ≤ 2n−1 ребер, т.к. граф является или деревом, или набором деревьев. Тогда максимальное кол-во пар, т.е. ребер = 2n−1, т.к. мы не можем добавить в дерево ребро так, чтобы не получился цикл ⇒ набор перестал быть ~~хорошим~~ хорошим ⇒ этот граф является очень хорошим ⊕ Продолжение →

Задача 3 (продолжение)

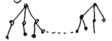
1. Пример на $2n-1$



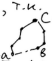
Пусть хороший набор граф — X
Очень хороший набор — OX

2. очень хорошие наборы для $n = 4$

Докажем, что очень хороший граф — это только дерево. В 1 пункте мы доказали, что хороший граф не содержит циклов ⇒ очень хороший граф — это дерево или несколько деревьев. Предположим, что OX — набор деревьев. Тогда заметим, что мы можем добавить ребро между двумя висячими вершинами, и при этом цикл у нас не появится, ⇒ граф остается X



⇒ изначальный граф не OX ⇒ граф мо OX может быть только деревом, т.к. добавив в него ребро мы получим цикл



a — в, т.к. обе связаны с корнем графа — C

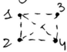
Тогда нам нужно найти кол-во деревьев, которые мы можем построить на графе при $n=4$

Заметим, что изначально у каждого из них есть возможность подружиться с каждым ⇒ мы можем строить ребра между любыми вершинами.

~~Всего деревьев для 4 вершин [illegible] упорядочим за вершину на которой [illegible] за вершину, у которой степень > 2~~

продолжение ⟶

Задача 3 (продолжение).  кратчайшего ~~такого~~ такого

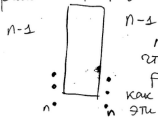


Заметим, что любой граф (такого) на этим вершинам из трех ребер — будет связным. Предположим, что нет. Тогда пусть от вершины 1 нельзя дойти до 2 (не умаляя общности, т.к. граф для всех вершин одинаковый). Тогда получилось две компоненты связности ~~ххх~~ (если больше, то объединим до двух) или по 1 и 3 или 2 и 2. Заметим, что даже если в каждой будут проведены все ребра, то только в случае 1 и 3 когда все ребра проведены или будет 3. Тогда всего случаев ~~хх~~ „несвязности" будет 4: выбрать вершину в 1 компоненту связности. Остальные же случаи будут связными. Тогда выбрать 3 ребра из 6 $= C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 20 - 4$ случая $\Rightarrow$ $\Rightarrow 16$. Ответ: 16. ⊕

3. $F(n)$ — кол-во ОХ для $2n$ человек

Из предыдущих пунктов мы знаем, что ОХ граф — это дерево $\Rightarrow$ нужно найти кол-во деревьев для $2n$ человек с 5 возможными связями

1) Посмотрим на граф для $2n$ и построим дерево для $2n-2$ из них (убираем n и n вершины). Заметим, что деревьев для них будет $F(n-1)$. Теперь посмотрим, как мы можем добавить эти две вершины, чтобы



граф остался деревом, т.е. из каждой вершины хотя бы проведем по одному ребру. в Σ = 2 ребра для $2n$
Возьм

Продолжение $\longrightarrow$

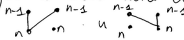
$2n-1$ ребер — дерево.

Задача 3 (продолжение)

Возможные ребра

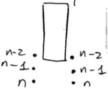
~~Заметим, что одно ребро из~~

Нам нужно провести два ребра. Случаи, которые не соответствую тому, что из каждой вершины должно быть хотя бы одно ребро:



— 2. В остальных у нас получается связный граф и дерево, т.е. $C_5^2 - 2 = \frac{5\times4}{2} - 2 = 8 \Rightarrow A = 8$

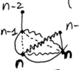
2) Теперь посмотрим на граф на 2n−4 вершин и построим на нем дерево — — f(n−2) деревьев.



Теперь нам нужно ~~все~~ добавить 4 ребра так, чтобы граф стал деревом и был связным. Заметим, что если ~~все~~ одна из вершин n−1 → n−2, а другая с n−1 или n−2, то мы можем убрать вершины n и получить дерево на 2n−2, т.е. случай, который мы уже считали в 1). ~~Рассмотрим 2 случая~~

~~(2) когда~~ одна из n−1 вершин → n−2 (иначе граф несвязный)

(2 варианта выбрать „n−1" и 2 „n−2" ⇒ $\boxed{4}$ варианта).

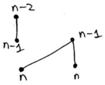


n−1 если к одной n

Тогда $\boxed{n-1}$ ~~все~~ (оставшаяся) → к одной из n (~~2 варианта~~) или к обеим ←

3 варианта × 2 (выбрать n) = 6.

продолжение ⟶



2 вариант:
к обеим n

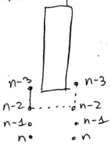
Теперь, чтобы граф был связный, нужно от левой $n-1$ провести к одной из n → 2 варианта.

! Если $n-1$ справа будет → с $n-1$ или $n-2$, то этот случай мы разбирали в 1)

Тогда всего случаев $4 \times (2+6) = 32$

$\Rightarrow B = 32$

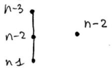
3) Посмотрим на граф на $2n-6$ вершинах



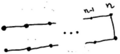
Построить дерево на нем $F(n-3)$ способов.
Нам нужно добавить 6 ребер, чтобы граф остался деревом и связным.
Тогда хотя бы одна вершина $n-2$ должна → $n-3$, иначе несвязн.

При этом другая не → $n-2$ или $n-3$, иначе это случай из 2). Пусть $n-2$ → с $n-3$ будет → с $n-1$, иначе граф не будет связным, т.к. $n-2 \Leftrightarrow n-2$. (два варианта выбрать $n-1$)

Также $n-2$ должно быть связано с $n-1$



$\ominus$



такие графы не учтены, так как до $n-1$ — это не было деревом