ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802782126775

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ХАСАНОВ

Имя МАКСИМ

Отчество МАРАТОВИЧ

Дата рождения 19 01 2005

Город участия КАМЕНСК-УРАЛЬСКИЙ

Аудитория 310

Телефон 89521422770

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

28C2782126775

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия КАМЕНСК-УРАЛЬСКИЙ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	23	02	00						
Балл члена жюри №2	25	23	02	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 050

Подпись члена жюри №1 Што

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Изначально все розы белые и их бесконечное количество, так как для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ существует роза с номером n.

Пусть p - простое число и для любого $k \in \mathbb{N}$ роза с номером kp белая, а все остальные красные. Докажем, что при такой раскраске желание Королевы выполняется.

Розы с номерами np и mp белые $(n, m \in \mathbb{N})$. $np + mp = (n+m)p \Rightarrow$ $\Rightarrow$ роза с номером $(n+m)p$ белая, так как её номер кратен p.

Пусть $n \not\vdots\, p$ и $m \not\vdots\, p$. Тогда розы с номерами n и m красные. Тогда роза с номером nm красная, так как среди делителей nm не будет p, так как $n \not\vdots\, p$ и $m \not\vdots\, p \Rightarrow nm \not\vdots\, p$.

Значит при таком способе раскраски все условия выполняются, а так как множество простых чисел бесконечно (как известно из детского садика), то вариантов такой раскраски тоже бесконечное множество. (+) 25 б.

№2

Для решения этой задачи докажем несколько фактов

1) $a \text{ xor } a = 0$

док-во: в двоичной записи цифры первого числа будут совпадать с цифрами второго, значит результатом будет 0.

2) $a \text{ xor } 0 = a$

док-во: $1 \text{ xor } 0 = 1$ и $0 \text{ xor } 0 = 0$ (очевидно), значит для каждой цифры двоичной записи a ничего не изменится

3) $a \text{ xor } 1 = a+1$, при $a \vdots 2$

док-во: $a_{10} = \overline{c_1 c_2 c_3 \ldots 0}$ (т.к $a \vdots 2$). Для последней цифры числа $0 \text{ xor } 1 = 1$, для остальных цифр ничего не поменяется $\Rightarrow a_{10} \text{ xor } 1 = \overline{c_1 c_2 \ldots 0}_2 \text{ xor } 1 =$ $= \overline{c_1 c_2 \ldots 1}_2 = a_{10} + 1$

4) $a \text{ xor } (a+1) = 1$, при $a \vdots 2$

док-во: из пункта 3 и свойств операции xor очевидно

Теперь ~~нужно~~ рассмотрим значение $f(y)$ при различных y.

$f(1)=1$

$f(2)=3$

$f(3)=0$

$f(4)=4$

$f(5)=1$

$f(6)=7$

$f(7)=0$

$f(8)=8$

Заметим, что $f(y)$ можно определить следующим образом:

$$f(y)=\begin{cases} y, & y\equiv_4 0 \\ 1, & y\equiv_4 1 \\ y+1, & y\equiv_4 2 \\ 0, & y\equiv_4 3 \end{cases} \quad \star$$

Док-во:

БИ: $f(1)=1$ П. И: $f(y+1)=1$ $(y\equiv_4 0)$ Ш И: $f(y+5)=1$ $(y\equiv_4 0)$

Пусть $y\equiv_4 0 \Rightarrow y \vdots 2$. Тогда $f(y+2)=f(y+1) \text{ xor } (y+2)=1 \text{ xor } (y+2)=y+3 (n\,3)$

$f(y+3)=f(y+2) \text{ xor } (y+3)=(y+3) \text{ xor } (y+3)=0$ $(n\,1)$

✓ $f(y+4)=f(y+3) \text{ xor } (y+4)=0 \text{ xor } (y+4)=y+4$ $(n\,2)$

$f(y+5)=f(y+4) \text{ xor } (y+5)=(y+4) \text{ xor } (y+5)=1$ $(n\,4)$

1) $y=xn^2+2022n+2022$

возьмём $n=2$

$y=4x+2022\cdot 2+2022 \equiv_4 2\cdot 2+2 \equiv_4 2 \Rightarrow f(y)=y+1$ (см. $\star$)

$f(y)=y+1=4x+2022\cdot 2+2022+1$

Значение $f(y)$ нам говорит Алиса, пусть оно равно k. Мы знаем, что оно равно $4x+4044+2023$, значит мы можем выразить и найти x

$x=\frac{k-4044-2023}{4}$ ✓ + 10 д

2) $y=xn^2+Bn+C$

$n\equiv_4 0 \Rightarrow y\equiv_4 C$

$n\equiv_4 1 \Rightarrow y\equiv_4 x+B+C$

$n\equiv_4 2 \Rightarrow y\equiv_4 2B+C$

$n\equiv_4 3 \Rightarrow y\equiv_4 x+3B+C$

если $C \equiv_4 2$:

берём $n \equiv_4 0$. Тогда $y \equiv_4 C \equiv_2 2$ и $f(y) = y+1$. Узнаем значение $f(y)$, после чего выражаем x как в первой подзадаче

$f(y) = y+1 = xn^2 + Bn + C + 1$

$xn^2 = f(y) - Bn - C - 1$

$x = \frac{f(y) - Bn - C - 1}{n^2}$

если $C \equiv_4 0$:

берем $n \equiv_4 0$. Тогда $y \equiv_4 C \equiv_4 0$ и $f(y) = y$ (см $\star$). И снова выражаем x

$x = \frac{f(y) - Bn - C}{n^2}$

$+_{0}$ 13б.

если $C \not\vdots 2$:

нам нужно, чтобы $f(y)$ дала либо y, либо $y+1$, то есть y должен быть кратен 2 (см $\star$)

$y \equiv_4 \{C;\ x+B+C;\ 2B+C;\ x+3B+C\}$

Первый вариант не подходит, т.к $C \not\vdots 2$. Третий тоже не подходит, ведь $2B+C \equiv_2 C \not\vdots 2$. Второй и четвертый варианты в данном случае одно и тоже ($x+B+C \equiv_2 x+3B+C$). Попробуем получить из второго варианта подходящий

$x+B+C \equiv_2 x+B+1 \Rightarrow B \equiv_2 x+1$ тогда $x+B+C$ чётное при любом x

то есть угадать ответ можно если $C \vdots 2$ или если $C \not\vdots 2$ и $B \equiv_2 x+1$

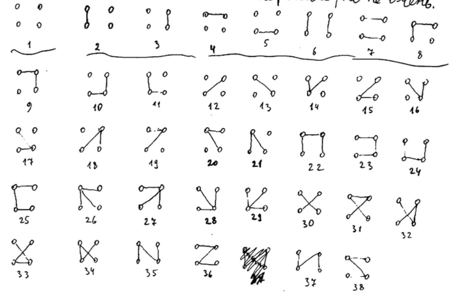
№3

1) стол с гостями можно представить в виде графа, где гости — вершины, и рёбра между ними проведены между друзьями. Тогда очень хороший набор — подграф этого графа, в котором нет циклов. Тогда очень хороший набор может выглядеть так:

в этом случае кол-во пар друзей равно $2n-1$. При добавлении ещё одного ребра в графе появится цикл, так что это кол-во пар максимально возможно. +2б.

хорошие, но не очень.

2)



Больше 3-х рёбер быть не может, иначе будет цикл и набор будет нехорошим.

−

Бланк ответов