ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802585446292

Титульный лист

Направление	■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11
Фамилия	ДЕМЕНЕВА
Имя	МАРГАРИТА
Отчество	ВИТАЛЬЕВНА
Дата рождения	11 11 2006
Город участия	ПЕРМЬ
Аудитория	115
Телефон	89128820861

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802585446292

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 2

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	12	17	25	02						
Балл члена жюри №2	12	17	25	02						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 056

Подпись члена жюри №1 Шиб

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание №2.

1) Последовательность ростов Алисы: $x_0; x_0-d; \dots ; x_0-(n-1)d; x_0-nd$

Тогда изменение роста Алисы $x_0-(x_0-nd) = x_0-x_0+nd = nd = 2022$

$$\frac{x_0+x_0-d+\dots+x_0-(n-1)d+x_0-nd}{n+1} = \frac{(n+1)x_0-d(1+2+\dots+n)}{n+1} = \frac{(n+1)x_0-d\frac{n(n+1)}{2}}{n+1} =$$

подставляем $dn=2022 \Rightarrow \frac{dn}{2} = \frac{2022}{2} = 1011$

$= x_0 - \frac{dn}{2} = x_0 - 1011 = 34 \Rightarrow x_0 = 1011+34 = 1045$ ✓

Заметим, что при заданном n (то есть дано и мы не можем изменять), тогда получается система уравнений из 2 уравнений и двух переменных ($x_0 = 1045$; $d = \frac{2022}{n}$)

Значит 1 решение (тк линейное). При возможности выбора n, тк выпила n пузырьков $\Rightarrow$ число целое и положительное (аналогичные условия на d), значит n и

5б d делители 2022. Делители 2022: 1; 2; 3; 6; 337, 674; 1011; 2022.

Значит, возможные пары (n, d) будут $(1; 2022)$ $(2022; 1)$ $(2; 1011)$ $(1011; 2)$

Заметим, что тк рост изменился на $(3; 674)$ $(674; 3)$

+ 2022 (тк уменьшение $\Rightarrow -2022$), значит $(6; 337)$ $(337; 6)$

изначальный рост должен быть больше 2022, иначе у нее станет отрицательный рост, но это не так ($x_0 = 1045 < 2022$), значит столько выпить не могла (вообще решений было бы тк $x_0 = const$, то 8)

2) Последовательность ростов Алисы: $x_0; x_0-d; \dots ; x_0-(n-1)d; x_0-nd$.

Тогда изменение роста Алисы: $x_0-(x_0-nd) = x_0-x_0+nd = nd =$
$= 232848$

Среднее арифметическое: $\frac{x_0+x_0-d+\ldots+x_0(n-1)d+x_0-nd}{n+1}=\frac{(n+1)x}{n+1}$

$\cdot(1+2+\ldots+n)=\frac{(n+1)x_0-d\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n+1}=x_0-\frac{dn}{2}=x_0-116424=20222022$

Тк $dn=232848 \Rightarrow \frac{dn}{2}=\frac{232848}{2}=116424$ (+) 12б

Значит, $x_0=20222022+116424=20338446$. Тк Если $n=\text{const}$ (задано) $\Rightarrow d=\frac{232848}{n} \Rightarrow$ определяется однозначно $x_0=20338446 \Rightarrow$ Тогда пары единственна. Если n - подбираете сами ($n\geq 0$ (но тк $nd\neq 0 \Rightarrow n\neq 0$) и целое тк кол-во пузырьков). Тогда ~~делители 232848: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 21, 22, 24, 27, 28, 33~~, 36, 42, 44, 48, 49, 55, 56, 63, 66, 72, ~~77, 84, 88, 98, 99~~ $232848=2^4\cdot 3^3\cdot 7^2\cdot 11$, Тогда делителями 232848 при выборе n, d определяется однозначно). Тогда

? 2 2 2 2 3 3 3 7 7 11 Надо посчитать кол-во возможных выбрать кол-во двоек C_4^x, где $0\leq x\leq 4$, аналогично с 3 (C_3^y, где $0\leq y\leq 3$), 7 (C_2^z где $0\leq z\leq 2$) и 11 (C_1^q где $0\leq q\leq 1$), Тк $C_n^k=C_n^{n-k}$ ($C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^{n-k}$) $\Rightarrow$ ~~ll~~ $\Rightarrow$ тогда C_1^q равны при любом q (тк ~~...~~ $C_1^0=\frac{1!}{1!0!}=1=C_1^1$) $\Rightarrow$ При суммировании всех таких можно $2\cdot C_4^x\cdot C_3^y\cdot C_2^z$ z при $z=0$ и $z=2$ равны и равны $C_2^0=\frac{2!}{2!0!}=1$, а при $z=1$ будет $C_2^1=\frac{2!}{1!1!}=2 \Rightarrow 2(C_4^x\cdot C_3^y\cdot 1+C_4^x\cdot C_3^y\cdot 2)=$ $2(C_4^x\cdot C_3^y+2C_4^x\cdot C_3^y)=6\cdot C_4^x\cdot C_3^y$ ~~y=11~~ При $y=1$ и $y=2$ равны и $y=0$ и $y=3$ так же равны рассчитаем по формуле С значение и получаем $C_3^0=1, C_3^1=3$

$6\cdot\left(2\cdot\left(C_4^x\cdot 3+C_4^x\cdot 1\right)=12\cdot 4\ C_4^x=48\ C_4^x\right.$

$x=0$ и $x=4$ C равны $\Rightarrow$ $C_4^0=1$

$x=1$ и $x=3$ C равн $\Rightarrow$ $C_4^1=4$

$x=2\Rightarrow C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=3$

$48(2\cdot 1+2\cdot 4+3)=48(2+8+3)=48\cdot 13.$

~~Тк~~ $\Rightarrow$ Тк $x_0=const$, а d принимает возможно $48\cdot 13$ значений $(48\cdot 13=624)\Rightarrow$ Пар$(x_0;d)=624$

Задание № 1.

не совсем очевидно, почему кол-во способов выбрать простые - бесконечно.

Ответ: для любого N существует.

Решение: выпишем ряд простых чисел (кроме 2) то есть все простые и нечетные. Тк простых чисел бесконечно много (из математики) $\Rightarrow$ выбрать N (или $N+1$ и ту) из бесконечно большого $\Rightarrow$ возможно (таким уже C_k^N, где k любое число, тк это кол-во простых чисел (N не обязательно, можно любое больше N, тк тогда больше раз будет кол-во N (эти выбранные среди простых красим в белый)) $C_k^N=\frac{k!}{N!(k-N)!}=\frac{k\cdot(k-1)\dots(k-N+1)}{N}\Rightarrow$ при увеличении k (Тк $N=const$) дробь увеличивается $\Rightarrow$ когда-то превзойдет N) ~~Докаж~~ Итак эти выбранные красим в белый (среди простых), а остаким в красной. Мы доказали что количество расрасок больше N. Докажем, что сумма номеров двух белых равна красной розе, это тк предположения что сумма номеров двух белых роз равна белой, то есть сумма двух нечетных имеет равна нечетному числу => противоречие. Докажем что произведение любых двух красных равна красному, ну пусть нет (тогда белому), а тк номера белых это простое число => единственная возможная пара 1 и это простое, но это простое белое => противоречие. (+) 12 б

Пример доказали работает (все условия выполняются и таких примеров больше N). ~~Предположение~~ ~~вр~~

Задание № 3.

Для начала докажем, что есть закономерность $f(n) = 1 \operatorname{xor} 2 \ldots \operatorname{xor} n$ (считаем что $f(x)$ xor выполняются последовательно то есть 1 xor 2 потом (1xor2)xor3 и тд.). Если $n \equiv_4 0$ (по модулю 4 равно 0 или n делится на 4) тогда $f(n)=n$, если $n \equiv_4 3$ ($n \% 4 = 3$) тогда $f(n) = 0$, если $n \equiv_4 2$ ($n \% 4 = 2$), тогда $f(n) = n+1$, если $n \equiv_4 1$ ($n \% 4 = 1$), тогда $f(n) = 1$. $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 0$; $f(4) = 4$ (для первых трех есть пример в условие, $f(4) = f(3) \operatorname{xor} 4 = 0 \operatorname{xor} 4 = 4$ $\left(\begin{array}{r} 0000 \\ 100 \\ \hline 0100 \end{array}\right)$). База доказана (метод мат. индукции). Докажем постепенно переходы от $n\%4=1$ к $n\%4=2$; $n\%4=2$ к $n\%4=3$; $n\%4=3$ к $n\%4=0$; $n\%4=0$ к $n\%4=1$. Давайте заметим, что

$n \% 4 = 0$ $(n \underset{4}{\equiv} 0)$ заканчивается в 2сс (2сс — это двоичная система счисления) на 00 (вроде есть вид $\overline{x^r x^{r-1} \ldots x^1 x^0}$, где $x^1 = 0$ и $x^0 = 0$ $(\overline{x^r x^{r-1} \ldots x^0 0 0})$). Заметим, что если в 2сс число заканчивается на 1, то оно нечетное ~~вид~~, т.к. $\overline{x^r x^{r-1} \ldots x^1 1}_2 =$

$= \underbrace{1 \cdot 2^0 + 2^1 x^1 + \ldots + 2^r \cdot x^r}_{\vdots 2 \text{ (делится на 2)}}$ вид: ~~1к~~ $\Rightarrow 1 + 2a \Rightarrow$ нечетное число.

Пусть число оканчивается на 10, тогда $\overline{x^r x^{r-1} \ldots x^1 0}_2 =$

$= \underbrace{x^r \cdot 2^r + x^{r-1} \cdot 2^{r-1} + \ldots}_{\vdots 4 \text{ (т.к. 2 хотя бы во 2 степени)}} + 2 + 0 \Rightarrow$ по модулю 4 дает остаток 2 $\Rightarrow$

~~00~~ число делящееся на 4 оканчивается на $\overline{00}$ $(\overline{x^r x^{r-1} \ldots 00}_2 = x^2 \cdot 2^2 + \ldots + x^{r-1} \cdot 2^{r-1} + x^r \cdot 2^r)$. ~~Отсюда~~ Отсюда справедливо

$n \underset{4}{\equiv} 0$ $(n \% 4 = 0)$ оканчивается на 00 ~~кра~~

$n \underset{4}{\equiv} 1$ $(n \% 4 = 1)$ оканчивается на ~~00~~ 01 (аналогично перед 01 делится на 4, и $01 = 1$ дает по модулю 4 остаток 1)

$n \underset{4}{\equiv} 2$ $(n \% 4 = 2)$ оканчивается на 10

$n \underset{4}{\equiv} 3$ $(n \% 4 = 3)$ оканчивается на 11 (остальное число (перед 11) делится на 4, а $11 = 3$, что дает остаток 3 по модулю 4)

Тогда ~~Будет~~ по предположению индукции доказано для ~~вы~~ всех k ~~каких~~ (рассматриваем четверки $4k-3; 4k-2; 4k-1; 4k$ (или по ~~какому~~ модулю 4 это $1; 2; 3; 0$) тогда докажем для $4(k+1)-3$; $4(k+1)-2$; $4(k+1)-1$; $4(k+1)$. ~~Зная~~ Рассматриваем от $4k$ к $4(k+1)-3$

Заметим, что $f(n) = f(n-1) \text{ xor } n$. По предположению / индукции $f(4k)=4k \Rightarrow f(4k+1)-3) = f(4k+1) = f(4k) \text{ xor } (4k+1)$

Тк $4k$ оканчивается в 2сс на 00, то $4k+1$ не изменяет знаков до 00 (то есть $4k_{10} = \overline{x^r x^{r-1} \ldots x^2 00}_2$, то есть

$4k+1 = \overline{x^r x^{r-1} \ldots x^2 01}_2$) $\text{xor} \begin{array}{cccccc} x^r & x^{r-1} & \ldots & x^2 & 0 & 0 \\ x^r & x^{r-1} & \ldots & x^2 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow 4k \text{ xor } 4k+1 = 1$ (доказано.) V

т.к одинаковые в столбцах $\Rightarrow$ везде 0

$f(4k+2) = f(4k+1) \text{ xor } 4k+2 = 1 \text{ xor } 4k+2$

$\text{xor} \begin{array}{cccccc} x^r & x^{r-1} & \ldots & x^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x^r & x^{r-1} & \ldots & x^2 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 4k+2_{10} = \overline{x^r x^{r-1} \ldots x^2 10}_2$, а $f(4k+2) = \overline{x^r x^{r-1} \ldots 11}_2$

(не изменятся тк $0 \text{ xor } 0 = 0$, $1 \text{ xor } 0 = 1$) V

Значит $f(4k+2)-1 = 4k+2 \Rightarrow f(4k+2) = 4k+3$ (доказали)

$f(4k+3) = f(4k+2) \text{ xor } 4k+3 = 4k+3 \text{ xor } 4k+3 = 0$ V
тк ~~все~~ биты в одинаковом порядке, тк числа равны

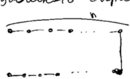
$f(4k+4) = f(4k+3) \text{ xor } 4k+4 = 0 \text{ xor } 4k+4 = 4k+4$ V
тк $4k+4 = \overline{x^r x^{r-1} \ldots x^2 x^1 x^0}$
$\text{xor} \begin{array}{ccccc} x^r & x^{r-1} & \ldots & x^2 x^1 & x^0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 00 \end{array}$, а 0 не изменяет (см. выше)

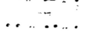
Доказали шаг $\Rightarrow$ Индукция доказана $\Rightarrow$ Утверждение, сделанное нами верно.

~~Тогда докажем, что за 1 ход нельзя угадать, тк Крот не знает $x \equiv$? 4 кому равно (остаток при делении на 4) он не знает y при делении на 4 какой остаток дает, значит может попасть на такое y (тк угадать нельзя~~

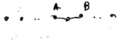
Тк минимальное кол-во ребер в графе из 2n вершин без циклов будет 2n-1 (граф дерево) из теории граф

1) Пусть люди стоят так (если добавить друзей пару по краям то получится не связный граф, тогда очень хороших наборов не бывает ~~...~~ тогда добавить сильно нельзя). ~~Докажем, что~~ Тогда (если граф был ... A? ... и

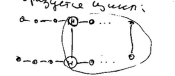




добавили пару между вершинами A и B, при этом ребро убрали => стало больше компонент связность в каждой из которых нет цикла => не бывает очень хороших наборов, тогда считаем, что при добавлении пары будет выглядеть



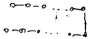
ребер $n-1+n-1+1= =2n-1$. При добавлении пары друзей образуется цикл:



А ребер в хорошем наборе быть не может больше $2n-1$ => и в очень хорошем наборе ребер $\leq 2n-1$.

(+) 2б

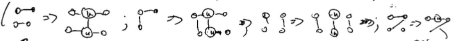
Ответ: $2n-1$ Пример:



2) Тк 4 всего => $n=\frac{4}{2}=2$.

Возможно кол-ва ребер 0 (но тогда это не очень хороший, тк при добавлении пары друзей в итоге хороший), 1 (но тогда минимальное противоречие с 0 ребер), 2 (что 2 тоже будет ~~возмо~~ минимальное противоречие с 0 ребер

? ⊖



Тогда при 3 ребрах всего может быть вариантов (ребра быть не может) ребер максимум 6 $(\frac{4\cdot3}{2})$ $C_6^3=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}=20$, но где циклом ропик назовет $n=4 \Rightarrow$ учтся при делении на 4 дает остаток 2, и по предположению $f(4x+2) = \underbrace{4x+3}_{\text{это число}}$

Алиса назовет (пусть Z)

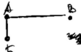
Значит, получаем уравнение $4x+3=Z$, отсюда

$x = \frac{Z-3}{4}$. (+) 25)

Ответ: за 1 ход (Алгоритм представлен выше).

Задание № 4.

Рассмотрим (поймем) когда набор будет плохим. Пусть люди это вершины, а дружба это ~~ребра~~ ребра (переход к теории графов), тогда при рассказывании загадки ставим стрелочки. Пусть в графе есть хотя бы 1 цикл (докажем что циклов быть не может) Тогда



(цикл может быть только с участием обоих сразу) Пусть частный случай: A, $Б$ и $В$ вершины находятся в каком-то цикле (пример A дружит и с $В$ и с $Б$). A знает загадку, тогда A расскажет $Б$ и $В$,

(если каждый дружит только с 1 человеком $\Rightarrow$ циклов не будет (т.к. из вершины если выйти, ~~...~~ только по этому ребру можно войти)

по циклу $Б$ будет рассказывать и дойдет до $В$ (т.к. ~~...~~ выходит примерно так), а т.к. $В$ услышал эту загадку не от A (в данный момент), то расскажет A, но это загадка $A \Rightarrow$ он расстроится $\Rightarrow$ в хорошем наборе пар друзей $\leq 2n-1$

x_0 может быть $\Rightarrow C_4^3 = 4$

Ответ: 4.