ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101252377418

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия ГУКИН

Имя МИХАИЛ

Отчество ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 28 08 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 461

Телефон 89920254059

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101252377418

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 1 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	5	–					
Балл члена жюри №2	20	0	0	5	–					

Итоговый балл 25

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1 Пусть это возможно, обозначим получившиеся суммы за $\underbrace{a, a+1, a+2 \ldots a+11}_{12 \text{ чисел}}$

Посчитаем сумму всех чисел $\frac{a+(a+1)+\ldots+a+11}{2}$ (т.к. каждое число мы посчитали в столбце и строке)

Получаем $\frac{\frac{2a+11}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{12}6}{2} = 6a+33$

С другой стороны сумма чисел от 1 до 36 $= \frac{1+36}{2} \cdot 36 =$ ~~каждого~~ $= 18 \cdot 37$

Тогда $6a+33 = 18 \cdot 37$ заметим, что правая ~~$2a+11=$~~

часть делится на 6 $18 \cdot 37 \equiv_6 0$, а левая — нет $6a+33 \equiv_6 33 \equiv_6 -3$

Значит это уравнение неразрешимо в натуральных числах

Ответ: Нет.

№2

№ 3

Давайте восстановим цепочку.

Пусть 2, 5 стоят рядом, а рядом с ними a_1 и a_2

т.е. $a_1 2 5 a_2$, при этом $5 \vdots a_2 - 2 \Rightarrow a_2 = \left[\begin{matrix}3\\7\end{matrix}\right.$ или 1

I Пусть $a_2 = 3$, тогда $a_1 = 4$ $\quad 2 \vdots 5 - a_1 \Rightarrow a_1 = \left[\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$ или 6, 7

$a_3 4 2 5 3 a_4$ $\quad 4 \vdots a_3 - 2 \Rightarrow a_3 = \left[\begin{matrix}4 \text{ – занято}\\3 \text{ – занято}\\6\end{matrix}\right.$ – только 6 подходит

Значит 4 и 6 стоят рядом #

II Пусть $a_2 = 4$, тогда $a_1 = 3$

$a_6 3 2 5 4 a_5$, тогда $4 \vdots a_5 - 5 \Rightarrow a_5 = \left[\begin{matrix}6\\7\end{matrix}\right.$

неполный перебор

При этом $3 \vdots a_6 - 2 \Rightarrow a_6 = [5$, тогда $a_6 = 5$, но 5 уже было

~~5 3 2~~ противоречие. #

№4 Оборотень бьёт максимум 5 клеток, тогда их не меньше, чем $\frac{64}{5} = \cancel{11}\ 12{,}8$

нет

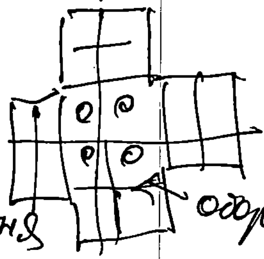
Очевидно, что оценка не достигается, т.к. каждый оборотень не может бить 5 клеток.

~~оборотней ≥ 16~~ ~~Заметим, что клеток,~~ удалённых от сторон ~~квадрата 8x8 на 2 со всех сторон,~~ 16 штук, т.е. чтобы оборотни били как можно больше клеток, они должны стоять внутри квадрата 4x4, т.е оборотней ≥ 16

Пример:

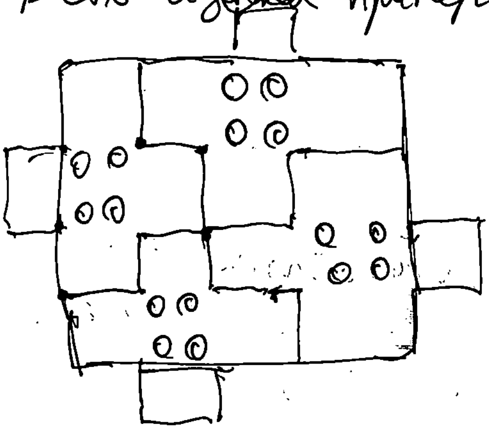
Давайте рассмотрим четверку оборотней, такую, что битые поля образуют крест 6×6

Есть ~~оценка~~ пример на 16 оборотней:



оборотни

4 креста × 4 оборотня



— пример

При этом потери составляют 16 клеток

Очевидно, что это и есть min кол-во оборотней

11, 12, 13, 14, 15 не подойдут

Ответ: 16

№2 $a,b,c>0$

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1$$

Пусть $a=\sin\alpha>0$, $b=\sin\beta>0$, $c=\sin\gamma>0$

Тогда $\sin^2\alpha+\sin^2 b+\sin^2 c+2\sin\alpha\sin\beta\sin c=1$

Данная замена равносильна, т.к. числа положительные и если хотя бы одно из них по модулю превосходит 1, то сумма (данная в условии) >1, что противоречит условию задачи.

Докажем тогда, что

$$\sin\alpha\sqrt{(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)}+\sin\beta\sqrt{(1-\sin^2\gamma)(1-\sin^2\alpha)}+\sin\gamma\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)}\geqslant 2\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta\cos^2\gamma}+\sin\beta\sqrt{\cos^2\gamma\cos^2\alpha}+\sin\gamma\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\geqslant 2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$\cancel{\sin\alpha|\cos\beta||\cos\gamma|}+$

$$\sin\alpha|\cos\beta\cos\gamma|+\sin\beta|\cos\gamma\cos\alpha|+\sin\gamma|\cos\alpha\cdot\cos\beta|\geqslant 2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

Левая часть по неравенству о средних $\geqslant 3\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)}$

Докажем, что $3\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)}\geqslant 2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$, т.к. обе части неотрицательны, возведем неравенство в 6 степень.

$$3^6(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^4\geqslant 2^6(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^3 \quad \Big|: \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\neq 0$$

при равенстве выполняется

$$3^6(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^4\geqslant 2^6(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$$

Из равенства в условии получаем $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\dfrac{1-a^2-b^2-c^2}{2}=\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2}{2}$

$$3^6(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)^2\geqslant 2^6\left(\frac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha-2}{2}\right)$$

Заметим, что ~~левая часть неотрицательна~~, при этом, если $\cos^2\beta+\cos^2\gamma\cancel{+\cos^2\alpha}\leq 2$, то ~~неравенство~~ выполняется.

Если $\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\gamma>2$, то по неравенству ~~Коши-Буняковского-Шварца~~

~~$1\cdot\cos^2\beta+1\cdot\cos^2\alpha+1\cdot\cos^2\gamma\le\sqrt{\ }$~~

$$3^6(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)^2\geq 2^5(\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\gamma)-2^6$$

$$2+\frac{3^6}{2^5}(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)^2\geq\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\gamma$$

~~Пусть $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma=t$~~

~~Очевадно, что $\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\gamma\le\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+3$~~

~~$2+\frac{3^6}{2^5}t^2\geq t+3$~~

продвижений нет

№2 $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

~~$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq2\sqrt{abc}$~~

~~$1-a^2\geq a^2$, заменим $1-x^2\to x^2$, тем самым не только увеличив левую часть.~~

~~$a\sqrt{b^2\cdot c^2}+b\sqrt{c^2\cdot a^2}+c\sqrt{a^2\cdot b^2}\geq2\sqrt{abc}$~~

~~$3abc\geq2\sqrt{abc}$~~

возведем в квадрат обе части:

$a^2(1-b^2)(1-c^2)+b^2(1-c^2)(1-a^2)+c^2(1-a^2)(1-b^2)\geq4abc$

здесь ~~не~~ учтены попарные произведения, которые могут только увеличить л.ч., т.к. $|a|,|b|;|c|\le1$. Очевидно из начального условия.

~~$a^2-(ab)^2+(abc)^2+b^2-(bc)^2+(abc)^2+c^2-(ac)^2+(abc)^2\geq4abc$~~

черновой лист 1

$$1-2abc+(ab)^2-(bc)^2-(ac)^2+3(abc)^2-4abc\geq 0$$

$a^2+b^2+c^2$

$$1-6abc+3(abc)^2\geq \underbrace{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4)}{2}$$

$$2-12abc+6(abc)^2\geq(1-2abc)^2-(a^4+b^4+c^4)$$

$$1-8abc+2(abc)^2\geq-(a^4+b^4+c^4)$$

$$a^4+b^4+c^4+2(abc)^2-8(abc)+1\geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2-(2(ab)^2+2(ac)^2+2(bc)^2)+2(abc)^2-8(abc)+1\geq 0$$

$\wedge\wedge$

$2ab+2ac+2bc$ вычитаем большее

$$1-2abc-(2ab+2ac+2bc)+2(abc)^2-8(abc)+1\geq 0$$

$$-(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)$$

$$2-4abc-(a+b+c)^2+2(abc)^2-8(abc)+1\geq 0$$

$$3-12abc+2(abc)^2$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{}$$

№ 2

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\cancel{3-a^2}(1-c^2)(1-b^2)(1-a^2)} \geq 2\sqrt{abc}$$

$$\underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{1-2abc}(1-c^2)(1-b^2)(1-a^2) \geq 4abc$$