ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101906348313

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Фамилия	ПАВЛЕНКО
Имя	ВЕРОНИКА
Отчество	АЛЕКСАНДРОВНА
Дата рождения	16 02 2007
Город участия	ТЮМЕНЬ
Аудитория	409
Телефон	+79227916907

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101906348313

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Город участия Тюмень

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	5	–	0					
Балл члена жюри №2	20	20	5	–	0					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№2

$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \; a_{2023}$

$a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1$

$(a_{2023} - 1)^2 = a_{2023}^2 - 2a_{2023} + 1 \geq 0$, т.к. квадрат числа всегда неотрицателен

$$\begin{cases} a_{2023}^2 \geq 2a_{2023} - 1 \\ a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1 \end{cases}$$

$2a_1 - 1 \geq 2a_{2023} - 1$

$a_1 \geq a_{2023}$ √

$$\begin{cases} (a_i - 1)^2 \geq 0 \\ (a_i - 1)^2 > t, \text{ где } t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_i^2 \geq 2a_i - 1 \\ a_i^2 > 2a_i + t - 1, \; t<0 \end{cases}$$

~~При этом среди~~ Тогда, если $a_{i+1} = a_i$ или $a_{i+1} = a_i + \frac{t}{2}$, $t<0$ (т.е. $a_{i+1} < a_i$)

обязательно то выполняется $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$

Предположим, что это не так, т.е. $a_{i+1} > a_i$ (всегда)

Тогда: $a_{2023} > a_{2022} > a_{2021} > \ldots > a_2 > a_1$

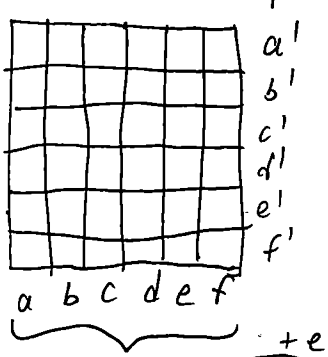
След-но: $a_1 < a_{2023}$, но это неправда, т.к. мы выяснили, что $a_1 \geq a_{2023}$. Тогда наше предположение неверно, и найдется хотя бы один a_{i+1} такой, что $a_{i+1} \leq a_i$.

А значит существует такой номер i, что $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$

+

№ 1

получившиеся суммы



Числа, обозначающие суммы, получившиеся по вертикали, в сумме дают сумму чисел в клетках:

$a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+\ldots+35+36$

Точно так же и по горизонтали:

$a'+b'+c'+d'+e'+f' = 1+2+3+\ldots+35+36$

Предположим, что у нас получилось расставить числа в клеточках так, что суммы по вертик. и горизонт. – 12 последоват. чисел. Т.е. $a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f'$ – последовательные, если их расставить в некотором порядке. Тогда они представляют арифм. прогрессию, где a_1 – наименьшее из них; $d=1$ – разница прогрессии; $n=12$ – кол-во чисел в прогрессии; и тогда $S=(1+2+3+\ldots+35+36)\cdot 2$ – сумма всех членов прогрессии.

$$S=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$$

Также по этой формуле посчитаем $S'=1+2+3+\ldots+36$:

$$S'=\frac{2\cdot 1+1(36-1)}{2}\cdot 36=(2+35)\cdot 18=666$$

$$S=\frac{2a_1+1(12-1)}{2}\cdot 12=(2a_1+11)\cdot 6=12a_1+66=666\cdot 2=1332$$

$$a_1=\frac{1332-66}{12}=\frac{1266}{12}$$

$a_1=105,5$ – нецелое

То есть чтобы условие выполнилось, сумма в одном из столбиков или строк должна быть равна 105,5, что невозможно, т.к. исходя из усл. задачи все числа целые. Значит расставить числа так, чтобы по верт. и гор. суммы являлись послед. числами нельзя

Ответ: нет, нельзя

№5

„приятное", если нечет кол-во цифр и все цифры-нечет

Число $a = \underbrace{\overline{\ldots(2K+1)(2m+1)}}_{2n+1 \text{ цифр}}$ $\quad b = \underbrace{\overline{\ldots(2d+1)(2z+1)}}_{2f+1 \text{ цифр}}$

Тогда при умножении (рассмотрим столбиком):

$$\times \begin{array}{r} \overline{\ldots(2K+1)(2m+1)} \\ \ldots(2d+1)(2z+1) \end{array}$$

$+$ $((2K+1)\cdot 10+2m+1)(2z+1)+t$ - произведение остальных цифр

$((2K+1)\cdot 10+2m+1)(2d+1)\cdot 10+t'$ – произв. ост. цифр

...

$(2K+1)(2z+1)\cdot 10+(2m+1)(2z+1)+t$

$+$

$(2K+1)(2d+1)\cdot 100+(2m+1)(2d+1)\cdot 10+t'$

...

Тогда получаем, что последняя цифра получившегося произведения: $(2m+1)(2z+1)=4mz+2m+2z+1$ $\Rightarrow$ значит она нечет

Предпоследняя цифра: $(2K+1)(2z+1)+(2m+1)(2d+1)=$

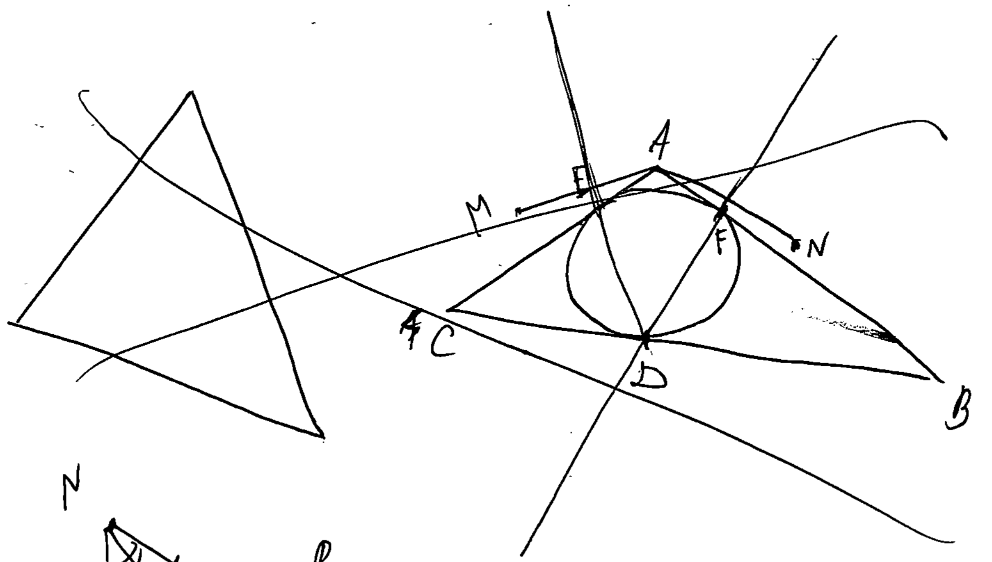
$=4Kz+2K+2z+1+4md+2m+2d+1=$

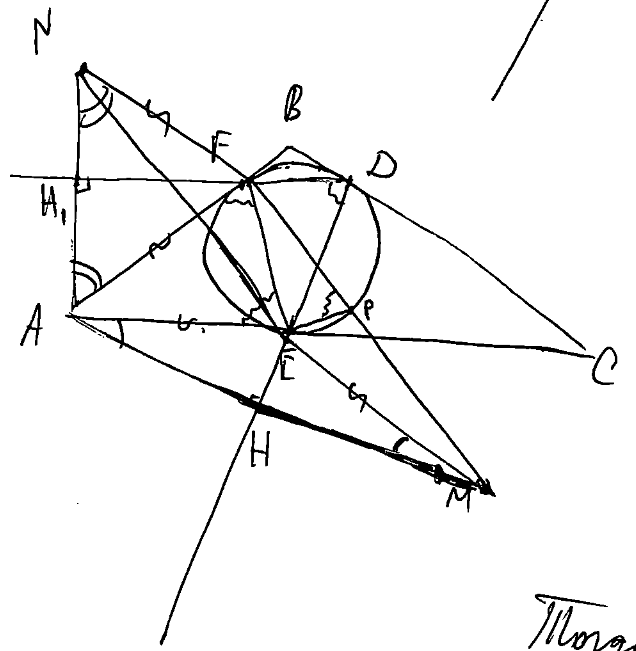
$=2(2Kz+K+z+2md+m+d)+2$ $\Rightarrow$ ~~значит~~ ~~она~~ ~~чет.~~

$$\begin{array}{r} \times\ 77 \\ 15 \\ \hline 385 \\ 77\ \ \\ \hline 1155 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ \cancel{77}\ 55 \\ 13 \\ \hline 165 \\ 55\ \ \\ \hline 715 \end{array}$$

Продвижений нет

№3





A-симм. M отн. DE => AH=MH
симм. N отн. DF => $AH_1=NH_1$
AH - расст. до DE
AH_1 - расст. до DF,
т.е. $\angle DHA=90°$
$\angle DH_1A=90°$

Тогда $\triangle AEM$ - равнобедр (т.к. EH-высота и медиана)
$\triangle NFA$ - равнобедр. (FH_1 - высота и медиана)

$\underbrace{AE=AF}_{\text{касат. к окр.}}=EM=NF$ => $\angle EMA=\angle EAM=\alpha$
$\angle FNA=\angle FAN=\beta$

$\angle AEF=\angle AFE=\angle FDE=\angle FPE$ (см. рис.) $=\gamma$
угл. хорд. и кас.

~~∠AF.~~

~~∠NFM=~~ $\angle NFE=\angle NFA+\gamma$
$\angle NFA=180°-2\beta$

$\angle FEM=360°-\gamma-\angle AEM$ $\quad\angle AEM=180°-2\alpha$
$\angle FEM=180°+2\alpha-\gamma$ $\quad\angle NFE=180°-2\beta+\gamma$

не следует

Тогда в силу симметрии $NE = FF \Rightarrow 2\gamma - \gamma = -2\beta + \gamma$

$\angle FEM = \angle NFE$

$NE \parallel FM \Rightarrow MENF$ – параллелограмм

ЧТД

∓