ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101137370724

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☒ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия АКАТЬЕВ

Имя СВЯТОСЛАВ

Отчество ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 17 06 2009

Город участия УФА

Аудитория 9101

Телефон 89273210751

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101137370724

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☒ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 13:16 до 13:20

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	20	20					
Балл члена жюри №2	20	20	20	20	20					

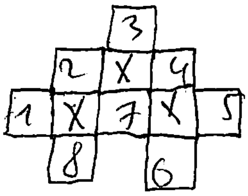
Итоговый балл 100

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1.

посмотрим фигуру 

вырежем клетки как на рисунке, получится 8 одноклеточных кусков. заметим, что у фигуры всего 11 клеток, поэтому если убрать 4 клетки, то останется 7 клеток. для одной части нужна хотя-бы одна клетка, тогда для 8 не менее 8 > 7, значит выбрать 4 клетки можно не всегда.

+

Ответ: нет, нельзя.

2.

пусть скорость Ильи — v_1, а Наташи — v_2, пусть они встретились через t часов, тогда по условию (S-длина пути)

$$t(v_1+v_2)=S$$
$$v_1(t+1)=S$$
$$v_1t=v_2(t+6)\ \checkmark$$

$$t(v_1+v_2)=v_1(t+1)\ \checkmark$$
$$tv_1+tv_2=tv_1+v_1$$
$$tv_2=v_1$$

$$tv_1=v_2(t+6)$$
$$t^2v_2=v_2(t+6)$$
$$t^2=t+6$$
$$t^2-t=6 \Leftrightarrow t^2-t-6=0$$

квадратное уравнение имеет всего 2 решения;

$t=3$: $\checkmark$ время до встр.

$$3^2-3-6=0$$
$$9-9=0$$

$t=-2$:

$$2^2+2-6=0$$
$$4-4=0$$

но по условию $t \geq 0$ т.к. это время.

2. продолжение:

тогда $t=3$, ~~значит~~

$$3(v_1+v_2)=S$$
$$v_1(3+1)=S$$
$$3v_1=(3+6)v_2$$

$$3v_1+3v_2=S$$
$$4v_1=S$$

заметим, что Илье тогда понадобилось $3+1=4$ часа ходьбы, тогда $v_1=\frac{1}{4}S$, при этом $3v_2=v_1$, тогда

$$3v_2=\frac{2}{4}S$$
$$v_2=\frac{1}{12}S$$

тогда Настаьве нужно 12 часов, всего она прошла $3+6+1=$ $=10$ часов, тогда осталось 2 часа (+).

Ответ: 2 часа.

4

отрезок соединяющий середины диагоналей равен ~~на~~ полуразности оснований, тогда

$$(a;b)=\frac{a-b}{2} \quad \vee$$

пусть $(a;b)=d$, $a=dx$, $b=dy$, $(x;y)=1$, тогда:

$$d=\frac{dx-dy}{2}$$
$$1=\frac{x-y}{2}$$
$$2=x-y$$
$$x=y+2$$
$$x\equiv_2 y$$

тогда $x/2$ и $y/2$ не взаимнопростые.

по условию

$$ab=7!$$
$$d^2xy=7!$$

Бланк ответов

4. продолжение.

заметим, что $7! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 3\cdot5\cdot7\cdot2\cdot2^2\cdot(2\cdot3) =$
$= 3\cdot5\cdot7\cdot3\cdot2^4 = 3^2\cdot5\cdot7\cdot2^4$
тогда 2 входит в $7!$ в 4 степени, ~~тогда~~
x и y нечетны, поэтому $d^2 = 2^4 k^2$ или $d = 4k$, тогда
$16k^2xy = 3^2\cdot5\cdot7\cdot2^4$
$k^2xy = 3^2\cdot5\cdot7$
заметим, что k это 1 или 9, если $k=1$, то
$xy = 3^2\cdot5\cdot7$
$x(x-2) = 3^2\cdot5\cdot7$
$x(x-2) = 315$

~~делит~~
315 раскладывается на 2 делителя только такими способами:

$1\cdot315$; $3\cdot105$; $5\cdot63$; $7\cdot45$; $9\cdot35$; $15\cdot21$, среди них
нет произведения вида $x(x-2)$, поэтому это не возможно
(это все пары т.к. по степеням вхождения всего делителей $3\cdot2\cdot2 =$
$= 12$, тогда пар делителей $\frac{12}{2} = 6$)
если $k^2 = 9$: $d = 4\cdot3 = 12$
$xy = 5\cdot7$
$(x;y) = 1$
Не умаляя общности $x=5$, $y=7$, тогда основания:
~~$5\ 9 =$~~ $a = 5\cdot12 = 60$, $b = 7\cdot12 = 84$

Ответ: 60 и 84

(+)

5.

Тактика для Васи:
длины полосок одинаковы, поэтому он может повторять ход Пети для фишки, которую тот не прогнал своим ходом, если Вася не может сходить, то это при возможных ситуациях:

1) если нужная Васе фишка в конце полоски, то и та, на которой ходил Петя вначале была в конце полоски по тактике Васи, значит Петя не мог сходить, и эта ситуация невозможна

2) если круг преграждает дорогу треугольнику, но Петя сходил на 6 клетку своей полоски, тогда он был на 5 или 4, тогда треугольник стоял на 5 или 4 своей полоски, и 4 клетка полоски треугольника это ~~точка~~ клетка пересечения, если круг смог встать туда, то треугольник был не на 4 позиции, тогда на 5, но тогда круг на 4 не мешает ему попасть на 6

3) если треугольник преграждает дорогу кругу, то он встал на 4 позицию, тогда кругу нужно попасть на свою четвертую клетку, тогда он стоит на 3 или 2 позиции но тогда треугольник на его 6 клетке не мешает движению.

У Васи всегда есть ход, тогда он не проиграет, при этом игра не вечна т.к. полоски конечны, значит победит Вася.

3. Числа ненулевые т.к. есть деление на каждое из них.

$$a^3+\frac{1}{bc}=b^3+\frac{1}{ca}$$

$$\frac{a^3bc+1}{bc}=\frac{b^3ac+1}{ac}$$

$$\frac{a^3bc+1}{b}=\frac{b^3ac+1}{a}$$

$$a^4bc+a=b^4ac+b$$

$$abc(a^3-b^3)=b-a$$

$$abc(a-b)(a^2+ab+b^2)=b-a$$

$(a-b)(abc(a^2+ab+b^2)+1)=0$ числа различны

$$abc(a^2+ab+b^2)=0-1$$

~~повех~~

заметим, что $a^2+ab+b^2\geq 0$ т.к. иначе $ab<0$ т.к. $x^2\geq 0$,

~~тогда~~ ~~$2ab<ab$~~

пусть $a_1=-a$, тогда $a_1b=-ab$ и $a_1b>0$, ~~заметим~~ тогда

$a^2+ab+b^2=a^2-a_1b+b^2=(a_1)^2-a_1b+b^2$ т.к. $a^2=(-a)^2=a_1^2$

$a_1b\geq 0$, потому $2a_1b\geq a_1b$, заметим, что по разности в квадрате:

$$(a_1-b)^2=a_1^2-2a_1b+b^2\geq 0$$

$$0\leq a_1^2-2a_1b+b^2\leq a_1^2-a_1b+b^2=a^2+ab+b^2$$

тогда $abc<0$ и отрицательных среди a,b,c нечетное кол-во.

По симметричности

$$abc(a^2+ac+c^2)=-1$$

$$abc(a^2+ab+b^2)-abc(a^2+ac+c^2)=-1-(-1)$$

$$abc(a^2-a^2+ab-ac+b^2-c^2)=0$$

$$abc((b-c)(b+c)+a(b-c))=0$$

$$abc(b-c)(a+b+c)=0$$

+

$abc\neq 0$ т.к. $a\neq 0;\ b\neq 0;\ c\neq 0$

$b-c\neq 0$ т.к. $b\neq c$

тогда $a+b+c=0$

Если все числа <0, то и $a+b+c<0$, значит отрицательные не все и их не 3, тогда отрицательное ровно одно ЧТД