ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101017890796

Титульный лист

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия МОЖЕГОРОВ

Имя АНДРЕЙ

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 23 06 2010

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79630474938

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101017890796

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	05	00	11						
Балл члена жюри №2	25	05	00	11						

Итоговый балл 41

Подпись члена жюри №1 Шпо

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1.

1) Возьмём из таблицы произвольный квадрат 3×3 клеточек. пронумеруем его строки и столбцы начиная с нуля и кончая двумя. Теперь ~~его~~ клеточка, находящаяся в первой строке и первом столбце обозначается как $K[0;0]$, а последняя клеточка второго столбца – $K[1;2]$
По условию у этого квадрата $K[0;0]+K[0;1]+K[1;0]+K[1;1]=64$;
$K[0;1]+K[1;1]+K[0;2]+K[1;2]=64$; тогда получается, что клетки
$K[0;0]+K[1;0]$ и $K[0;2]+K[1;2]$ дают одинаковый результат при сложении с $K[0;1]+K[1;1]$ $\Rightarrow K[0;2]+K[1;2]=K[0;0]+K[1;0]$
2) аналогичное можно сказать и про $K[0;0]+K[0;1]$ и $K[2;0]+K[2;1]$,
и про $K[0;1]+K[0;2]$ ~~и~~ $K[2;1]+K[2;2]$ и про $K[1;0]+K[2;0]$ и
и $K[1;2]+K[2;2]$. ⇓

3) Сумма в любых двух клетках таблицы, соприкасающихся ребром, равна сумме других двух клеток таблицы, расположенных в ~~соответственных~~ тех же строках/столбцах, что и исходные клетки, и отстоящих от них на чётное число клеток.

4) Введём ~~в~~ таблице ту же индексацию, что ввели в квадрате. Тогда можно заметить, что $K[0;1]+K[1;1]=K[0;2047]+K[1;2047]$, т.к. $2047-1=2046$; $2046 \vdots 2$. Также можно заметить, что $K[0;0]+K[1;0]+$
$+K[0;1]+K[1;1]=64$, т.к. эти клетки составляют один квадрат 2×2. Тогда
$K[0;0]+K[1;0]+K[0;2047]+K[1;2047]=64$.
Если мы изменим номера столбцов на 2 и 3; 4 и 5 ... 510 и 511 то сможем найти, что ~~сумма в уг этих столбц столбцу~~ также $K[n;0]+K[n+1;0]+$
$+K[n;2047]+K[n+1;2047]$ также равно 64.
⇓
5) Сумма всех чисел первой и последней строки равна $64\cdot\frac{512}{2}=$
$=2^6\cdot 2^8=2^{14}=\frac{2^{16}}{2^2}=\frac{65536}{4}=16384$
6) Аналогично сумма всех чисел первого и последнего столбца, не считая чисел,

находящихся в первой и последней строках, равна

$64 \cdot \frac{2046}{2} = 64 \cdot 1023 = 2^6 \cdot 2^{10} - 64 = 2^{16} - 64 = 65536 - 64 =$

$= 65472$ (+) 25 б

7) $65472 + 16384 = 81856$

Ответ: 81856

№4.

1) Красота числа 101 = 1, так как оно простое, и пара чисел, дающая его в произведении, только одна — 101 и 1. + 4 б

2) Чему пропорциональна красота числа m? Допустим, что в его разложении на множители существует n различных чисел. Тогда его красота — это количество способов выбрать из них любое количество чисел (тогда среди выбранных и оставшихся чисел не будет одинаковых, следовательно, если мы возведём некоторые из чисел в обоих группах в любую степень и потом перемножим числа в обоих группах, то полученные два произведения будут в произведении давать n (при возведении всех чисел в правильную степень), а их наибольший общий делитель будет равняться одному, так как у них нет общих простых множителей.

⇓

3) Красота числа прямо пропорциональна количеству его различных простых делителей.

⇓

4) Максимальная красота среди первых 1024-х натуральных чисел — это два, возведённое в степень количество первых простых чисел, при перемножении дающих число, не выше 1024, из которых можно ~~один~~, так как эта ~~количество~~ красота равна $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$, что равно $(1+1)^n - 1^n$.

5) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$; $2310 > 1024$; $210 \leq 1024$.

⇓

~~6) Максимальная красота среди первых 1024 натуральных чисел равна пять.~~

~~Ответ:~~

6) Максимальная красота среди ~~натурал.~~ первых 1024 натуральных чисел равна $2^4 - 1$, т.е. равна 15.

7 б

Ответ: 15.

№3.

$$C_{24}^{1}+C_{24}^{2}+C_{24}^{3}+\ldots+C_{24}^{18}=2^{24}-\underset{1}{C_{24}^{24}}-\underset{24}{C_{24}^{23}}-C_{24}^{22}-C_{24}^{21}-C_{24}^{20}-C_{24}^{19}-\underset{1}{C_{24}^{0}}=$$

$$=2^{24}-26-\frac{24!}{22!\cdot(24-22)!}-\frac{24!}{21!(24-21)!}-\frac{24!}{20!(24-20)!}-\frac{24!}{19!(24-19)!}=$$

$=16721760$? 0 б

Ответ: 16721760.

№2.

1) Предположим, что существует два квадрата — один со ~~сто~~ ~~сторо~~ стороной x, другой со стороной y, причём $x>y$. Уменьшим сторону квадрата x на n, а сторону квадрата y увеличим на n. Тогда суммарная площадь квадратов равна $(x-n)^2+(y+n)^2=x^2-2xn+n^2+y^2+2yn+n^2$. Таким образом, площадь квадратов суммарная отличается от площади квадратов суммарных исходных на $-2xn+2yn+2n^2$. Следовательно, чтобы площадь двух квадратов при сокращении ~~одной~~ стороны квадрата x на n и увеличении квадрата y на n уменьшалась необходимо и достаточно, чтобы $2x$ было больше чем $2y+2n \Rightarrow x>y+n$. Следовательно, чтобы ~~найти стороны~~ нельзя было вышеупомянутым путём уменьшить суммарную площадь квадратов, необходимо и достаточно, чтобы не существовало такого n, или оно было меньше или равно нулю. Возьмём сторону одного квадрата за x, а другого за y, так, что $x \geq y$. Тогда при $x>y$ $\quad x>y+\left(x-y-\frac{1}{\infty}\right)$, где $\frac{1}{\infty}$ — достаточно малая величина, не равная нулю; значит $x=y$, тогда при $n>0$ $\; y+n>x$.

2) Чтобы минимализировать суммарную площадь двух равнобедренных прямоугольных треугольников, ~~нужно~~ сумма сторон которых равна Z, нужно найти такие квадраты, которых нельзя уменьшить суммарную площадь, уменьшив сторону одного и на столько же увеличив сторону другого.

3) Чтобы найти два прямоугольных равнобедренных треугольника с заданными сторонами и минимализированной площадью, необходимо и достаточно найти такую длину стороны каждого из них, чтобы длина стороны одного равнялась длине стороны другого.

4) ~~Два~~ ~~треугольника~~ треугольника равнобедренных, указанные в условии, прямоугольные, так как их третий угол

равен $\cancel{180}\,45 \cdot 2 = 90^\circ$.

$$\begin{cases} x + y = 4096 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 4096.$$

5) Сумма длин сторон каждого треугольника равна $\frac{4096}{2}$, т.е. равна 2048.

6) Сторона каждого из этих треугольников равна $\frac{2048}{2}$ т.е. равна 1024.

7) Площадь каждого из этих треугольников равна $\frac{1024^2}{2}$, т.е. равна $\frac{2^{20}}{2}$, т.е. равна 2^{19}, т.е. равна $(2^9)^2 \cdot 2$, т.е. равна 524288 (ед^2)

8) Суммарная площадь гор на рисунке равна $524288 \cdot 2$ т.е. равна 1048576.

Ответ: суммарная площадь гор на рисунке равна 1048576.

5б

Бланк ответов