ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101529104989

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11
Фамилия	СТЕПАНОВ
Имя	МИХАИЛ
Отчество	СЕРГЕЕВИЧ
Дата рождения	01 06 2006
Город участия	Томск
Аудитория	215
Телефон	89234235492
Дата	05 02 2024
Подпись	

Пример заполнения: А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101529104989

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия Томск

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	5	0					
Балл члена жюри №2	20	20	0	5	12					

Итоговый балл 51

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Сумма всех чисел в квадрате есть сумма арифметической прогрессии от 1 до 36 $\overset{\text{об}}{=} S$

$S = \frac{1+36}{2}\cdot 36 = \frac{37\cdot 36}{2} = \frac{1332}{2} = 666$

При суммировании строк и столбцов каждое число используем дважды

Также 2S должна быть равна сумме 12 последовательных чисел; т.е. пусть 1 число $\overset{\text{об}}{=} a$

$2S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) + (a+6) + (a+7) + (a+8) + (a+9) + (a+10) + (a+11)$

$2S = 12a + \frac{1+11}{2}\cdot 11 = 12a + 66 \Rightarrow 12a + 66 = 666\cdot 2 = 1332$

$12a = 1266$

$a = \frac{1266}{12} = 105,5$

~~a ∉ N ⇒ такая ситуация возможна~~

$a \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ такая ситуация невозможна

Ответ: нет

№3

Известно, что числа 2 и 5 стоят рядом $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \vdots 5-x \\ 2 \vdots x-5 \end{array}\right.$

1) Пусть $x = 7$ случай $x=1$ упущен

тогда $7 \vdots y-2$; учитывая, что 7 — простое число мы не можем подобрать натуральное $y \in [1; 8]$ для выполнения этих условий кроме $y = 3$, но далее необходимо, чтобы $3 \vdots 7 - z$;

1.1) Пусть $z = 4$

$4 \vdots w-3$; так как числа не повторяются $\Rightarrow w \in \varnothing$ такая расстановка невозможна

1.2) $z = 6$; тогда $6 \vdots w-3$ и $w = 4$ однозначно, т.к. 5 и 6 уже были использованы $\Rightarrow$ в случае 1 4 и 6 стоят рядом

2) $x = 4$, тогда $4 \vdots y-2$

2.1) $y = 3$ $\left[\begin{array}{l} 3 \vdots 4-z \\ 3 \vdots z-4 \end{array}\right.$

2.1.1) $z = 1$ $\left[\begin{array}{l} 1 \vdots w-3 \\ 1 \vdots 3-w \end{array}\right.$ 2 и 4 уже были использованы $\Rightarrow$ $\Rightarrow w \in \varnothing$ расстановка невозможна

2.1.2) $z = 7$ $\left[\begin{array}{l} 7 \vdots w-3 \\ 7 \vdots 3-w \end{array}\right.$ 2 и 4 уже были использованы $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ расстановка невозможна

Объединяя случаи 2.1 - расстановка невозможна

2.2) $y = 6$ $\left[\begin{array}{l} 6 \vdots z-4 \\ 6 \vdots 4-z \end{array}\right.$

$z = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \vdots w-6 \\ 1 \vdots 6-w \end{array}\right.$

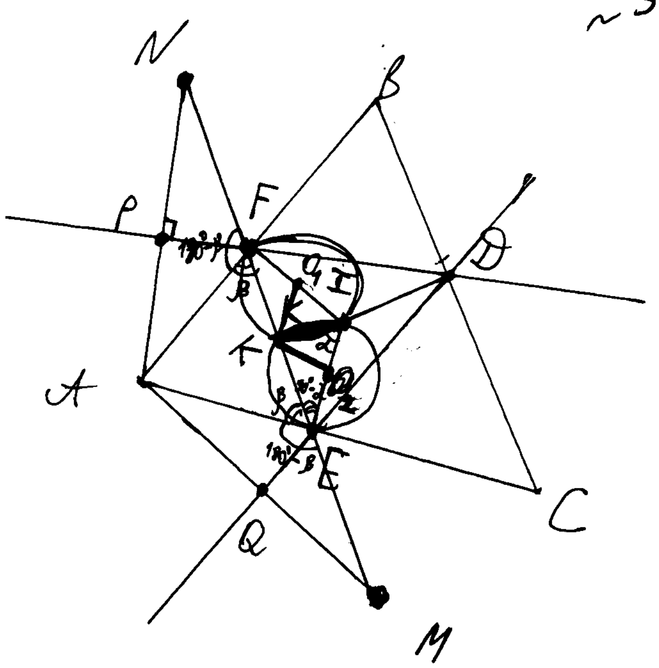
$w = 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7 \vdots a-1 \\ 7 \vdots 1-a \end{array}\right.$ $a = 8 \Rightarrow$ последнее число 3 $\Rightarrow$

3: 8 − 5 — верно ⇒ искомая расстановка:

4 2 5 6 3 1 7 8 ; где 4 и 6 стоят рядом г.т.д.

перебор исполнен

№5



Дано: A симметрична M относит. DE, N симметрична A относительно DF
I - центр вписанной в △ABC окружности радиусом R
IF = ID = IE = R
O_1; O_2 - центры окружностей, построенных на IF и IE как на диаметрах соответственно. и пересекающихся в точках I и K
Док-ть: K ∈ MN

AF = AE как касательные к окружности, проведенные из одной точки

△AEF - равнобедренный ⇒ ∠AFE = ∠AEF как углы при основании

∠AFE ≝ β ⇒ ∠AFN = ∠AEM = 180° − β (как смежные с углами ∠AFE и ∠AEF соответственно)

AE = AF
AE = EM (M симметрична A относительно DE)
AF = FN (N симметрична A относительно DF)
⇒ FN = EM ✓

AE = AF
FN = EM
∠AEM = ∠AFN = 180° − β
⇒ △AEM = △AFN по 2 сторонам и углу между ними

⇒ AN = AM
AE = AF
⇒ FE ∈ MN

это неверно

$$\left.\begin{array}{l} O_1I = O_2E = r \\ O_1K = O_2K = r \\ IK - \text{общая} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle O_1KI = \triangle O_2KI \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle O_2Ik = \angle O_1Ik = \alpha$

$\triangle FIE$ – равнобедренный $(FI = IE = R) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle IEF = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

Пусть $IK \cap FE = H \Rightarrow \triangle IHE$ – прямоугольный т.к. $\angle IHE =$

$= 180^\circ - 90^\circ + \alpha - \alpha = 90^\circ \Rightarrow IK \perp FE$

HO_2 – медиана $\Rightarrow$ $HO_2 = r$. т.к. проведена из прямого угла

$HO_2 = IO_2 = O_2E = r \Rightarrow O_2H = O_2K \Rightarrow K; H$ лежат на окружности; но

при этом $\left.\begin{array}{l} K \in IK \\ H \in Ik \end{array}\right\} \Rightarrow H, K$ – лежат на одной прямой $\Rightarrow$

$\Rightarrow H$ и k – одна и та же точка $\Rightarrow K \in FE \Rightarrow K \in MN$

ч.т.д.

№ 2

$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ (1) $\qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

$a\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2} + b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2} + c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2} \geq 2\sqrt{abc}$ (2)

согласно условию (1):

$1 - b^2 - c^2 = a^2 + 2abc$ (3)

$1 - c^2 - a^2 = b^2 + 2abc$ (4)

$1 - a^2 - b^2 = c^2 + 2abc$ (5)

т.к. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ $\Rightarrow$ корень раскрывается однозначно

Подставим (3); (4), (5) $\to$ (2):

$a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2} + b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2} + c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2} \geq 2\sqrt{abc}$

$a\sqrt{(a+bc)^2} + b\sqrt{(b+ac)^2} + c\sqrt{(c+ab)^2} \geq 2\sqrt{abc}$

$a(a+bc) + b(b+ac) + c(c+ab) \geq 2\sqrt{abc}$

$a^2 + abc + b^2 + abc + c^2 + abc = 2\sqrt{abc}$

$a^2+b^2+c^2+3abc \geq 2\sqrt{abc}$

согласно условию (1):

$1+abc \geq 2\sqrt{abc}$

$1-2\sqrt{abc}+abc \geq 0$

$(1-\sqrt{abc})^2 \geq 0$

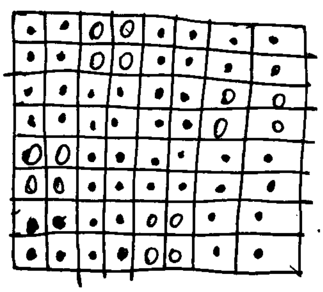
Данное неравенство выполняется всегда ⇒ неравенство (2) верно ч.т.д.

+

№4

не доказано

Согласно условию задачи выгоднее всего ставить оборотней кластерами по 4 в поле 2×2 чтобы они были соседние 2×2 квадраты тогда учитывая, что необходимо максимально без повторов битых клеток закрыть углы, получаем следующую картину:



Соответственно все клетки биты единожды, что обеспечивает условие минимума для размещения оборотней (0) 4 кластера по 4 оборотня

$4 \cdot 4 = 16$

Ответ: 16

+

пример есть

Бланк ответов