ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101636897562

Титульный лист

Направление	☒ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс	☒ 8	☐ 9	☐ 10	☐ 11

Фамилия	БУРЫКИНА
Имя	КСЕНИЯ
Отчество	АНДРЕЕВНА
Дата рождения	19 04 2009
Город участия	ЕКАТЕРИНБУРГ
Аудитория	М422
Телефон	89001984729

Дата 05 02 2024 **Подпись** Бур

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101636897562

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☒ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	23	25	00						
Балл члена жюри №2	25	23	25	00						

Итоговый балл 073

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

1) Так как $1+2+4+8+16+32$ - нечетное число (в сумме есть 1), то минимальная разница, которой мы можем добиться - это 1. (Т.к. 0 не может быть)

$1+2+4+8+16=31$ и 32

Ответ: первый человек берет самый большой мешок с 32 ручками, а второй - все остальные, в сумме у него 31. Меньшей разницы быть не может, т.к. всего нечетное кол-во ручек, а делить пакеты нельзя. +

2). Сделаем предположение: $2^0+2^1+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$, и докажем его по индукции. для $n\geq 1$

База индукции:

$n=1$.

$2^0=2^1-1$.

Предположение индукции: пусть это утверждение верно для $n=k$.

Индукционный шаг: докажем для $n=k+1$.

$2^0+2^1+2^2+\dots+2^k=2^{k+1}-1$

$2^0+2^1+\dots+2^{k-1}=2^{k+1}-2^k-1$

$2^0+2^1+\dots+2^{k-1}=2^k(2-1)-1$

$2^0+2^1+\dots+2^{k-1}=2^k-1$ получили предположение индукции $\Rightarrow$ наше предположение верно, и для $n=1024$ минимальная разница будет равна

1, и поделить пакеты они должны следующим образом: один берет самый большой пакет с ~~[illegible]~~ 2^{1023} ~~тук~~ ручками, а другой - все остальные $\oplus$

Задание 2.

Сначала посчитаем сумму чисел во всей картине:

$$\frac{2^8\cdot 2^{10}}{2^2}\cdot 2^5 = 2^{21}. \quad +$$

Теперь необходимо посчитать сумму чисел во всех клеточках, помимо периметра: это прямоугольник 254 на 1022. Представим его как прямоугольник $(2^8-2^1)(2^{10}-2^1)$, и посчитаем сумму в нем.

$$\frac{(2^8-2)(2^{10}-2)}{2^2}\cdot 2^5 = \frac{2^{18}-2^9-2^{11}+2^2}{2^2}\cdot 2^5 = \frac{2^2(2^{16}-2^7-2^9+1)}{2^2}\cdot 2^5 =$$

$$= (2^{16}-2^7-2^9+1)\cdot 2^5 = 2^{21}-2^{12}-2^{14}+2^5.$$

Вычтем полученное значение из общей суммы, чтобы узнать сумму на периметре. $2^{21}-2^{21}+2^{12}+2^{14}-2^5 = 2^{12}+2^{14}-2^5$

$$2^{12}+2^{14}-2^5 = 2^{12}(1+2^2)-2^5 = 2^{12}\cdot 5-2^5 = 2^5(2^7\cdot 5-1) = 2^5\cdot 639 =$$

$= 20\,448.$ $\oplus$ почему сумму чисел в меньшем прямоугольнике можно считать таким же образом, как и в большом?

Задание 4

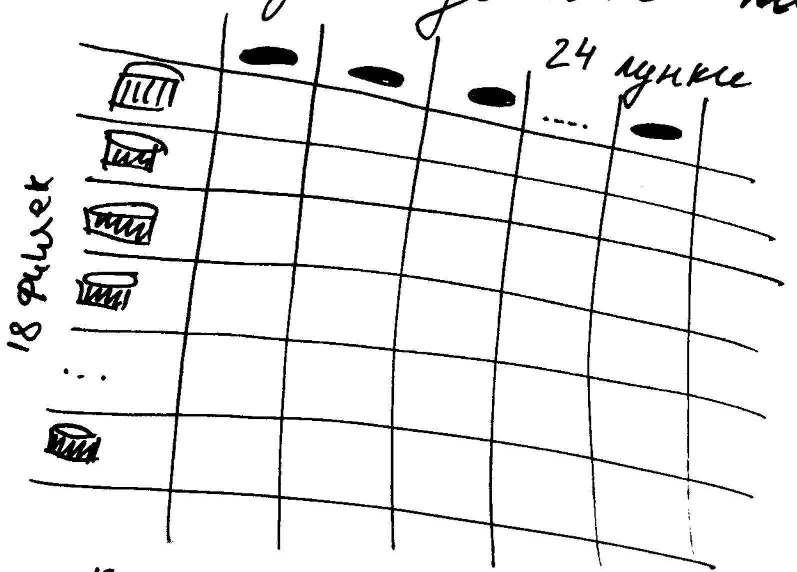
Обозначим фишку так: 

А лунку так: 

[redacted]

Бланк ответов

Тогда сделаем такую таблицу:



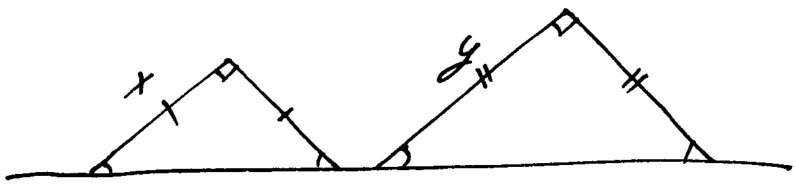
Каждую из 18 фишек мы можем положить в любую из 24 лунок, поэтому у нас по 24 варианта размещения каждой фишки; всего 24^{18}. Но здесь мы считаем, что каждая фишка уникальна, как и расстановка. Предположим, мы нашли какой-то вариант их размещения. Если мы поменяем ~~его~~ фишки местами, он не изменится, и это следует учесть. ~~Пред~~ Пусть мы запомнили места, на которых фишки стоят сейчас и хотим их поменять. Тогда у нас $18!$ ВАРИАНТОВ [redacted] разместить их по-другому. Получается, если мы выберем какое-либо из ~~них~~ размещений, будет ещё $18!-1$ таких же. Тогда в результате будет $\frac{24^{18}}{18!}$ различных размещений.

Ответ: $\frac{24^{18}}{18!}$

не является целым числом, а значит и ответом...

⊖

Задание 3.



Пусть сторона одной горы будет x, а другой — y. Так как треугольники (горы) равнобедренные, и угол при основании $=45°$, то угол при вершине $=90°$.

По условию задачи, $2x+2y=1024 \Rightarrow x+y=512$.

Площадь треугольника равна $h \cdot \frac{x}{2}$, где h — высота, а x — ~~осно~~ сторона, к которой эта высота проведена.

Т.к. треугольники равнобедренные и прямоугольные, одну из боковых сторон можно считать высотой. Значит,

$S_1 = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$, а $S_2 = y \cdot \frac{y}{2} = \frac{y^2}{2}$ Сумма площадей равна $\frac{x^2+y^2}{2}$. Нам необходимо, чтобы это значение было минимально. при $x+y=512$

Запишем $\frac{x^2+y^2}{2}$ как $\frac{(x+y)^2-2xy}{2}$. Их сумму мы уже знаем, $x+y=512$ и она не изменится. Поэтому чтобы минимизировать это значение, нам нужно получить их наибольшее произведение. +

Бланк ответов

Пусть $x \geq y$. Тогда $x = 256 + z$, а $y = 256 - z$.

$256 + z + 256 - z = 512$.

$yx = (256 + z)(256 - z) = 256^2 - z^2$.

А почему ограничение

на протяженность гор выполняется?

Чтобы yx было максимальным, надо, чтобы z^2 было минимальным. $z^2 \geq 0$; $z^2 = 0$. Если $z^2 = 0$, то и $z = 0 \Rightarrow y = x = 256 = 2^8$.

$$S = \frac{y^2 + x^2}{2} = \frac{2^{16} + 2^{16}}{2^1} = \frac{2^{17}}{2^1} = 2^{16}.$$

Ответ: минимальная площадь $= 2^{16}$. +