ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101226953633

Титульный лист

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Фамилия ХУСНУЛЛИНА

Имя ЭЛИНА

Отчество РАДМИРОВНА

Дата рождения 21 05 2007

Город участия НОВОСИБИРСК

Аудитория

Телефон 89821381285

Дата 05 02 2024 **Подпись** Н.Э

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

3101226953633

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Город участия НОВОСИБИРСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	00	00	20						
Балл члена жюри №2	00	00	00	20						

Итоговый балл 020

Подпись члена жюри №1 Шаб

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 4.

$$F(n,k)=\sum_{i=1}^{n} gcd(i,i+k)$$

+

1) $F(7,7)=\sum_{i=1}^{7} gcd(i,i+k) = gcd(1,8)+gcd(2,9)+cgd(3,10)\dots$

$\dots gcd(7,14) = 1+1+1+1+1+1+7 = 13$.

2) $F(1024;1024)$

Заметим, что у всех четные чисел $gcd(i,i+k)$ - отличное от 1 (2-min). ~~Каждое 4 число имеет gcd=4. т.к. к самому числу прибавляется 4~~. Заметим так же, что нужно обращать внимание на 2 в различной степени. ~~Зат~~ При $i=512$ (2^9), $k+i$ будет равен $1024+512$ - а $1024 \vdots 512$, следовательно $gcd(512,1536)=512$ - само число. При $i=257$ (2^8), $k+1$ будет равен $1024+257$ - аналогично $1024 \vdots 257$, $gcd=257$. Следовательно gcd будут давать отличные от ~~три~~ единицы значению, только являющиеся ~~двойкой~~ в степени ≤ 10. Тогда всего чисел отличных от единица:

±

$\cancel{(2^{10}\cdot 2^0+2^9\cdot 2^0+2^8\cdot 2^1+2^7\cdot 2^2+\dots+2^1\cdot 2^8=1+)}$

$2^0+2^0+2^1+2^2+2^3+\dots+2^8 = 4+4+8+16+32+64+128+256=512$.

Следовательно единиц будет $1024-512=\underline{512}$.

Сумма чисел отличных от единицы:

$(2^{10}\cdot 2^0+2^9\cdot 2^0+2^8\cdot 2^1+\dots+2^1\cdot 2^8 = 1024+512+256\cdot 2+128\cdot 4+64\cdot 8+32\cdot 16+16\cdot 32+8\cdot 64+4\cdot 128+2\cdot 256 = 1025+512+512+512+512+512+512+512+512+512 = 1024+512\cdot 9 = 1024+4608 = 5632$. Всего $\sum_{i=1}^{1024} gcd(i,1024+i) = 5632+512=6144$

Ответ: 6144

Задание 2.

1) $n=256$ $m=1024$

~~25,6~~ $\frac{256}{3}=85\frac{1}{3}$ $\frac{1024}{3}=341\frac{1}{3}$. 1 ⊖

~~Заметим, что четыре клетки на углах входят и в n, и в m. тогда всего прямоугольников 1×3=~~

$(85\cdot2+341\cdot2)\cdot32=426\cdot64=26264$

2) $n=503$ $m=2024$

Посмотрим 1 случай вне зависимости от положения:

$256+1024-2=1278$ (половина периметра)

$1278\cdot2=2556$ (весь периметр)

$\frac{2556}{3}\cdot32=852\cdot32=26264$ – верно, получаем формулу:

$\frac{(n+m-2)\cdot2}{3}\cdot32$ ⊖

тогда для второго случая с учетом вырезаного угла:

$\frac{(n+m-2)\cdot2-1}{3}\cdot32=\frac{2525\cdot2-1}{3}\cdot32=\frac{5049}{3}\cdot32=1683\cdot32=$
$=53856.$

Ответ: 1) 26264 ; 2) 53856.

~~Задание 1.~~

~~Заметим, что при $a=1$ и $1<b\le2048$ неравенство $gcd(a,b)<a$ xor b – всегда верно, то есть $1<a$ xor b.~~

~~1 в двоичной системе счисления – 1000... (сколько угодно нулей)~~

Бланк ответов

Задание 1.

Рассмотрим случай при $a = \cancel{0}\ 1$ и $a \le b \le 20\cancel{24}48$

Это неравенство неверно только тогда, когда $a = b$, т.к. в остальных случаях $gcd(1, b) = 1$, а $a \text{ xor } b > 1$, т.к. a в двоичной системе счисления равна $\underbrace{0\ldots0}_{\text{сколько угодно } 0}01$, а b точно отличается от a хотя бы одной 1 (вместо 0 в a). Это уже 2047 вариантов.

(Рассмотрим вариант, когда a - простое число, это означает, что $gcd(a, b)$ - тоже же $= 1$, и $a \text{ xor } b$ соответственно больше чем $gcd(a,b)$. Тогда, если a - любое, а b - простое, то мы можем брать любые $1 \le a \le b$ - т.к. из условия. В первом же случае где a - простое - мы можем брать $\forall b$: $a \le b \le 2048$. Соответственно всего таких вариантов $2048 - 1$ - для каждого простого числа. (аналогично для 1).

Простых чисел до 2048 - X штук.

Ответ: $2047 \cdot X$