ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101205390058

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ШКИПТАН

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество ОЛЕГОВИЧ

Дата рождения 24 11 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 403

Телефон 89025003076

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101205390058

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	10	0	0	–					
Балл члена жюри №2	20	10	0	0	–					

Итоговый балл 30

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2 Терб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

1) сумма всех чисел на доске $= S_\delta = \frac{2+1\cdot(36-1)}{2}\cdot 36 = 18\cdot 37 = 370+240+56 =$

$= 610+56 = 666$;

всумм по вертикали и по горизонтали в сумме равны $= 2\cdot S_\delta =$

$= \frac{2\cdot x+1\cdot(12-1)}{2}\cdot 12 = 6\cdot(2x+11) = 12x+66$, (где x — первое из 12-и посл-ых чисел) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 12x+66 = 2\cdot 666$; $12x = 2\cdot(666-33)$; $6x = 633$; $\frac{633}{6} = x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x = 105{,}5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ — не м.б (противоречие условию)

$\boxed{\text{Ответ: нет}}$

3) рассмотрим все возможные пары чисел, которые могут стоять рядом с 4:

(7;3), (6;2), (5;1), (8;6), (7;5), (5;3), (8;7), (7;6), (6;5), (3;2), (2;1). (3;1)

теперь рассмотрим все возможные цепочки с парами, не содержащими 6

(если (х;у) и (у;х) — одна и та же пара), цепочка чисел $= A = \overline{abcdefgh}$

I) $\overline{743\_}$; 8: $|x_1-4| \Rightarrow x_1 = \left[\begin{matrix}1\\5\\7\end{matrix}\right.$

3. $x_1=7 \Rightarrow$ не м.б $\Rightarrow$

(7;3) — не подх.

1. $x_1=1$: $\overline{7431\_}$; $|3-x_2|=1 \Rightarrow x_2 = \left[\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right. \Rightarrow x_2 = 2$

$\Rightarrow \overline{74325}$ (по усл); $\overline{74325\_}$; 5: $|x_3-2| \Rightarrow x_3 = \left[\begin{matrix}7\text{ — не м.б.}\\3\text{ — не м.б.}\\1\text{ — не м.б.}\end{matrix}\right.$

2. $x_1=5$:

$\overline{74352}$ (по усл); $\overline{74352x_2}$; 2: $|5-x_2| \Rightarrow x_2 = \left[\begin{matrix}3\text{ — не м.б.}\\4\text{ — не м.б.}\\6\end{matrix}\right. \Rightarrow x_2=6$

$\overline{743526x_3}$; 6: $|2-x_3| \Rightarrow x_3 = \left[\begin{matrix}3\text{ — не м.б.}\\4\text{ — не м.б.}\\5\text{ — не м.б.}\\8\end{matrix}\right. \Rightarrow x_3=8$

$\overline{7435268x_4} \Rightarrow x_4=1 \Rightarrow 8:5$ — неверно $\Rightarrow$ $x_1 \neq 5$

II) (5;1):

$A = \overline{541x_1} \Rightarrow x_1 = \left[\begin{matrix}3\\5\text{ — не м.б.}\end{matrix}\right.$; $x_1=3$;

$A = \overline{5413x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{matrix}4\text{ — не м.б.}\\2\end{matrix}\right.$;

$A = \overline{54132x_3\ldots} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{matrix}1\text{ — не м.б.}\\4\text{ — не м.б.}\\6\text{ — не м.б.}\end{matrix}\right. \Rightarrow$ (5;1) — не подх.

III) (4;5):

$A = \overline{4452x_1\ldots} \Rightarrow x_1 = \left[\begin{matrix}3\\4\text{ — не м.б.}\\7\text{ — не м.б.}\\6\end{matrix}\right.$

1. $x_1=3$:

$A = \overline{44523x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{matrix}5\text{ — не м.б.}\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow x_2=1$

$A = \overline{445231x_3} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{matrix}2\text{ — не м.б.}\\4\text{ — не м.б.}\end{matrix}\right. \Rightarrow x_1 \neq 3$

2. $x_1=6$:

$A = \overline{44526x_2\ldots} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{matrix}8\\1\end{matrix}\right.$

2.1 $x_2=1$:

$A = \overline{445261x_3} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{matrix}7\text{ — не м.б.}\\5\text{ — не м.б.}\end{matrix}\right. \Rightarrow x_2 \neq 1$

2.2 $x_2=8$:

$A = \overline{445268x_3} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{matrix}2\text{ — не м.б.}\\7\text{ — не м.б.}\\5\text{ — не м.б.}\\4\text{ — не м.б.}\end{matrix}\right. \Rightarrow$ (4;5) — не подх.

IV) (5;3):

$A = \overline{543x_1} \Rightarrow x_1 = \left[\begin{matrix}1\\5\text{ — не м.б.}\\7\end{matrix}\right. \Rightarrow x_1=1$

1.) $A = \overline{5431x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{matrix}4\text{ — не м.б.}\\2\end{matrix}\right.$

$A = \overline{54312x_3}$ — неверно (2 и 5 стоят не ..., по усл)

2. $A = \overline{5437x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{matrix}4\text{ — не м.б.}\\2\text{ — не м.б. (по усл)}\end{matrix}\right.$

(5;3) — не подх.

V (8; 7):

$A = \overline{8 4 7 \ldots x_1} \Rightarrow x_1 = \left[\begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array}\right.$

1. $x_1 = 3$:

$A = \overline{8473x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{array}{l} 4\text{-нем.д.} \\ 2\text{-нем.д.} \\ 6 \end{array}\right. \Rightarrow x_2 = 6$

$A = \overline{84736 \ldots x_3} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{array}{l} 4\text{-нем.д.} \\ 2 \\ 5 \end{array}\right.$

1. $x_3 = 2$:

$A = \overline{8473625x_4} \Rightarrow x_4 = 1, 10$ 1/3-5

2. $x_3 = 5$ - аналогично $\Rightarrow$ (8; 7) - неподх.

VI (3; 2):

$A = \overline{342 \ldots x_1} \Rightarrow x_1 = 6$

$A = \overline{3426x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{array}{l} 7 \\ 3\text{-нем.д.} \\ 1 \end{array}\right.$

1. $x_2 = 7$:

$A = \overline{34257 \ldots x_3} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{array}{l} 6 \\ 4\text{-нем.д.} \end{array}\right. \Rightarrow x_3 = 6$

$A = \overline{342576 \ldots x_4} \Rightarrow x_4 = \left[\begin{array}{l} 4\text{-нем.д.} \\ 5\text{-нем.д.} \\ 2\text{-нем.д.} \\ 8 \end{array}\right.$

$A = \overline{3425768 x_5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_5 = 1 \Rightarrow$ 1/3-3 $\Rightarrow$ (3; 2) - не подх.

VII) (2; 1) или (1; 2)

$A = \overline{1425 \ldots x_1} \Rightarrow x_1 = \left[\begin{array}{l} 7 \\ 3 \\ 1\text{-нем.д.} \end{array}\right.$

1. $x_1 = 7$:

$A = \overline{14257x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{array}{l} 4\text{-нем.д.} \\ 6 \end{array}\right.$

$A = \overline{142576x_3} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{array}{l} 1\text{-нем.д.} \\ 5\text{-нем.д.} \\ 4\text{-нем.д.} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 \neq 7$

2. $x_1 = 3$:

$A = \overline{14253x_2} \Rightarrow x_2 = \left[\begin{array}{l} 4\text{-нем.д.} \\ 2\text{-нем.д.} \\ 6 \\ 1\text{-нем.д.} \end{array}\right.$

$A = \overline{142536x_3} \Rightarrow x_3 = \left[\begin{array}{l} 4\text{-нем.д.} \\ 5\text{-нем.д.} \\ 2\text{-нем.д.} \\ 1\text{-нем.д.} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 \neq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2; 1) - не подх

неполный перебор

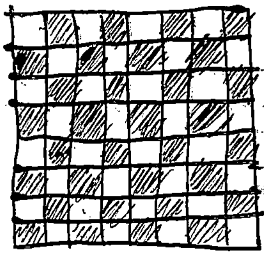
• (Из пунктов I - VII) Пары, не содержащие в себе 6-ку не могут стоять с 4-ой (по бокам (по разным сторонам) от 4-и); найдём такую пару чисел (a; b), что от тройки (a; 4; b) можно построить искомую цепочку:

$x_0 = 8, x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 1, x_4 = 7, x_5 = 2, x_6 = 5, x_7 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \overline{84617253}$ & все условия выполняются, аналогично происходит с остальными парами с 6-ми $\Rightarrow$ если числа удалось расставить, то 4 будет стоять рядом с 6-ой.

ч.т.д.

4)



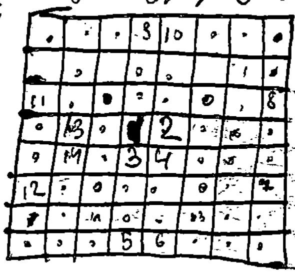
Раскрасим доску в шахматном порядке; заметим, что фигура бьёт клетки только одного цвета (цвета поля, на котором стоит фигура) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ фигур не может быть меньше $2\cdot\left(\left[\frac{32}{5}\right]-1\right)=2\cdot 7=14$;

при этом, чтобы фигуры били все клетки доски, нужно >14 фигур (т.к. фигуры дают на крайние клетки)

можно меньше

Пример для 18:



2) $a^2+b^2+c^2+2abc=1$)

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\overset{?}{\geq}2\sqrt{abc}$; $|^2$

$\begin{cases}(1-a^2)(1-b)^2\geq0\\(1-b^2)(1-c^2)\geq0\\(1-c)^2(1-a^2)\geq0\\abc\geq0\end{cases}$

$a^2(1-b^2)(1-c^2)+b^2(1-c^2)(1-a^2)+c^2(1-a^2)(1-b^2)+$

$+2ab\cdot\left(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)^2}\right)+2ac\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)(1-b^2)^2}+2bc\cdot\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)(1-a^2)^2}\overset{?}{\geq}4abc$;

$=a^2(1-(b^2+c^2)+b^2c^2)+b^2(1-(a^2+c^2)+a^2c^2)+c^2(1-(a^2+b^2)+a^2b^2)+2ab(1-c)\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+$

$+2ac\cdot(1-b)\cdot\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+2bc\cdot(1-a^2)\cdot\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}=$

$=a^2(1-1+a^2+2abc+b^2c^2)+b^2(1-1+b^2+2abc+a^2c^2)+c^2(1-1+c^2+2abc+a^2b^2)+$

$\underbrace{+2ab(1-c^2)\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+2ac(1-b^2)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+2bc\cdot(1-a^2)\cdot\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}}_{=M}=$

$=a^4+2abc(a^2+b^2+c^2)+b^4+c^4+3a^2b^2c^2+M=$

$=(a^4+b^4+c^4)+2abc(1-2abc)+3a^2b^2c^2+M=(a^4+b^4+c^4)+2abc-a^2b^2c^2+M$; $M>0$ ✓

$a^4+b^4+c^4-a^2b^2c^2+2ab(1-c^2)\cdot\sqrt{(c^2+2abc+a^2b^2)}+2bc\cdot(1-a^2)\cdot\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}+$

$+2ac(1-b^2)\cdot\sqrt{(b^2+2abc+a^2c^2)}=a^4+b^4+c^4-a^2b^2c^2+2ab\cdot(1-c^2)\cdot(c+ab)+2bc(1-a^2)\cdot(a+bc)+$

$+2ac(1-b^2)\cdot(b+ac)+2abc$

2 (прод.) $a^4+b^4+c^4-a^2b^2c^2+(2ab-2abc^2)(c+ab)+(2bc-2a^2bc)(a+bc)+(2ac-2ab^2c)(b+ac)=$

$=a^4+b^4+c^4-a^2b^2c^2+2abc+2a^2b^2-2abc^3-2a^2b^2c^2+2abc+2b^2c^2-2a^3bc-2a^2b^2c^2+$

$+2abc+2a^2c^2-2ab^3c-2a^2b^2c^2=$

$=a^4+b^4+c^4-4a^2b^2c^2+6abc+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-2abc^3-2ab^3c-2a^3bc \vee 4abc$

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-4a^2b^2c^2-2abc(c^2+b^2+a^2) \vee -2abc$

$(a^2+b^2+c^2)^2-4a^2b^2c^2-2abc+4a^2b^2c^2 \vee -2abc$

$(a^2+b^2+c^2)^2-3a^2b^2c^2 \vee 0$; $\quad \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 3a^2b^2c^2 \Rightarrow)$

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2-3a^2b^2c^2 \geq 0 \Rightarrow$ не доказано

$\Rightarrow a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$