ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101465898464

Титульный лист

Направление	☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11
Фамилия	ЗАЙЦЕВ
Имя	ДМИТРИЙ
Отчество	ВАДИМОВИЧ
Дата рождения	09 01 2008
Город участия	ЕКАТЕРИНБУРГ
Аудитория	И-503
Телефон	89193931538

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101465898464

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	25	00	25						
Балл члена жюри №2	00	25	00	25						

Итоговый балл 050

Подпись члена жюри №1 Шаб

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1. Заметим, что число $64 \vdots 4$, значит мы можем точно восстановить значения в каждой ячейке, оно равно $64 : 4 = 16$, если мы поставим такое значение в каждую ячейку, что условие выполниться для любого квадрата, т.к. $16 \cdot 4 = 64$. Осталось только посчитать ответ. 512 чисел находится сверху и снизу и 2048 справа и слева, но ~~так~~ угловые клетки мы учтем дважды, поэтому их вычтем. $2 \cdot 512 \cdot 16 + 2048 \cdot 16 \cdot 2 - 16 \cdot 4 = 2 \cdot 16(512 + 2048 - 2) = 81\,856$. Такой ответ будет подходить под исходные условия, а доказательства что он единственный не требовалось.

Ответ: $81\,856$

⊖ 0 б

2.

Заметим, что если углы при основании р/б $\triangle = 45^\circ$, то угол оставшийся $\angle = 90^\circ$. Т.к. $180^\circ - 45^\circ \cdot 2 = 90^\circ$. Площадь $\triangle$ вычисляется, как $\frac{1}{2} ab \sin \angle$, где $\angle$ угол между сторонами a и b, в нашем случае $a = b$, и $\sin \angle = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} a^2$. Пусть a — это длина стороны первой горы, а b — это длина стороны второго треугольника. Из условия известно, что $2a + 2b = 4096$. Мы хотим минимизировать значение ~~площади треугольника~~, т.е сум площади $\triangle \triangle \Rightarrow$ минимизировать значение выражения $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. Заметим, что значение этого выражения минимально при $a = b$. Докажем это, через метод Штурма.

~~Пусть $a^2 + b^2$, но их сумма $= 4096$. Значит~~ т.к сумма a и b меняться не будет

Пусть x это значение, когда $a = b$, тогда если мы хотим изменить a на значение $\angle$, то b мы должны изменить на значение $-\angle$. Докажем, что при таком изменении сумма неуменьшиться, т.е $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \leq \frac{(a+\angle)^2}{2} + \frac{(b-\angle)^2}{2}$ т.к $a = b$ заменим их на $x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \leq \frac{(x+\angle)^2}{2} + \frac{(x-\angle)^2}{2}$$

Бланк ответов

2.

$$x^2 \le \frac{(x^2+2x\lambda+\lambda^2)+(x^2-2x\lambda+\lambda^2)}{2}$$

+ 25 б

$$x^2 \le x^2+\lambda^2$$

$\lambda^2 \ge 0$ – верно т.к квадрат неотрицателен. чтд.

Значит $a=b \Rightarrow$ если ~~$2a+2b$~~ $2a+2b=4096$, то

$$a=b=\frac{4096}{4}=1024$$

$$S=\frac{1024^2}{2}+\frac{1024^2}{2}=1024^2=2^{20}=1048576$$

Ответ: 1048576

4.

1) Число 101 – простое значит делится на 1 и на 101, это пара имеет НОД = 1, и она единственна $\Rightarrow$ Ответ: 1.

2) Из ОТА (основная теорема арифметики) известно, что нод двух чисел – это такое число, что оно получается в результате произведения наименьших степеней простых чисел при разбиении этих чисел на простые делители. Значит для того чтобы НОД двух делителей числа был равен 1, мы должны разбить простые делители из ~~разложения~~ разложения числа x на простые множители в два ~~не пересекающиеся группы~~ непересекающиеся ~~множества~~ набора, иначе НОД будет больше одного. Заметим, что для максимизации этого количества надо чтобы в ~~множестве~~ ~~простых~~ наборе ~~[illegible]~~ делителей числа было как можно меньше совпадений. Т.к иначе ~~нам~~ ~~придется~~ не будет варианта положить эти числа в одно множество $\Rightarrow$ количество вариантов разбить ~~на 2 [illegible]~~ от добавления такого числа не увеличится

4. Значит в ~~числе максимальной~~ числа x с максимальной красотой будет наибольшее возможное количество различных простых чисел. Заметим, что такое количество будет достигаться в том случае, если мы будем брать наименьшие простые числа, в ином случае мы могли бы взять их число меньше и соответственно больше чисел, значит ~~надо набрать наименьшие~~ будем набирать простые числа в порядке возрастания, пока их произведение ≤ 1024

2 3 5 7 — произведение этих чисел $= 210$, следующее число будет 11, его мы взять уже не можем. Теперь рассмотрим все подходящие ~~пары~~ наборы, заметим, что мы ~~не~~ можем просто рассмотреть все пары чисел, которые в произведении дают 210, в таких наборах будут только такие, что их НОД $= 1$, т.к. ~~простые~~ все простые делители этого числа уникальны. Для того чтобы посмотреть все такие пары проверим на что 210 делится из натуральных чисел таких, что они $\leq \sqrt{210}$ т.е. < 15, дальше все пары будут повторяться, т.к. ~~у числа не могут быть два числа которые~~ не существует двух чисел таких, что они больше корня числа и равны ему. Приведем весь перебор, знак "–" напротив числа означает, что пары к нему нет, иначе в паре с ним стоит число, в произведении с которым получается 210.

1 210
2 105
3 70
4 –
5 42
6 35
7 30
8 –
9 –
10 21
11 –
12 –
13 –
14 15

всего пар 8. Доказано, что пример подбирается ~~наи~~ наилучшим образом $\Rightarrow$ x максимальная красота - это 8.

Ответ: 8.

(+) 25

Бланк ответов