ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101696957876

# Титульный лист

**Направление** ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

**Фамилия** Гришин

**Имя** Матвей

**Отчество** Романович

**Дата рождения** 09 09 2008

**Город участия** Тюмень

**Аудитория** 317

**Телефон** 89292396854

**Дата** 05 02 2024 **Подпись**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101696957876

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

**Город участия** Тюмень

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 25 | 25 | 00 | 06 | | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 25 | 25 | 00 | 06 | | | | | | |

**Итоговый балл** 056

**Подпись члена жюри №1**

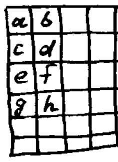
**Подпись члена жюри №2** Шаб

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

# Бланк ответов

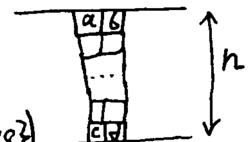
Задание 1   Ответ: 81856   Решение:

Рассмотрим прямоугольник с такими же свойствами, как в задаче, но меньше. Рассмотрим две левые верхние клетки. Пусть в них числа $a$ и $b$, внизу – $c$ и $d$, далее – $e, f$ (рисунок).




По условию $\begin{cases} a+b+c+d=64 \\ c+d+e+f=64 \end{cases}$, $\Rightarrow a+b=e+f$, но $e+f=64-g-h \Rightarrow$

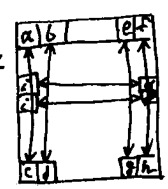
$a+b=64-g-h$, т.е. $a+b+g+h=64$. Тогда получаем, что если выбрать две соседние клетки в горизонтали, то сумма их и четвёртой пары, двигаясь по вертикали, равна 64. Существует и другое док-во данного утверждения. Возьмём данный нам прямоугольник. Возьмём 2 числа, которые являются соседними и стоят по периметру прямоугольника. Рассмотрим прямоугольник $2\times n$, вершинами которого являются числа $a, b, c, d$.




($n$ – длина или ширина прямоугольника. В нашем случае $n \in \{512; 2048\}$). Т.к. $n$ – чётное, то разобьём $2\times n$ на $\frac{n}{2}$ квадрата $2\times 2$. Тогда $\sum$ всех чисел в $n\times 2$: $\frac{n}{2}\cdot 64 = 32n$. Тогда рассмотрим прямоугольник $(n-2)\times 2$, получающийся вырезанием из предыдущего прямоугольника чисел $a, b, c, d$. Т.к. $n \vdots 2$, то $n-2 \vdots 2 \Rightarrow$ поделим аналогично на $\frac{n-2}{2}$ квадрата $2\times 2$. Их сумма: $\frac{n-2}{2}\cdot 64 = 32n-64$. Рассмотрим разность двух сумм – по рисунку это сумма $a, b, c, d$: $32n-(32n-64)=64$.

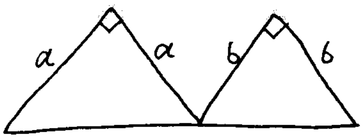
Т.е. $\sum$ двух соседних чисел по периметру с противоположно лежащими 2 числами – 64. (при условии, что $n$ – чётное). У нас длина и ширина чётные, значит применим наше утверждение к прямоугольнику. Разобьём числа (их $512+512+\cancel{1024}+2048+2048-4$, т.к. мы 4 раза дважды считаем угловые клетки $= 5116$) на такие четвёрки, чтобы сумма была равна 64 (мы это можем сделать, т.к. для 2-х чисел существует единственные 2 противоположно лежащих числа*). Тогда четвёрок будет $\frac{5116}{4}$, а раз $\sum$ каждой – 64, то общая $\sum$ лежащих по пер. клеток: $\frac{5116}{4}\cdot 64 = 5116\cdot 16 = 81856$

* Т.е. мы берём первые две клетки, следующие, следующие. Дойдя до конца (мы сможем это сделать, т.к. длина и ширина чётные), делаем тоже самое для оставшихся клеток. Так мы разобьём все числа на группы по 4 с $\sum$ 64.




+ 25б

Задание 2. Ответ: 1048576 Решение:




Т.к. углы при основаниях равноб. треугольников $45^\circ$, то они прямоугольные. ($\alpha = 180^\circ - 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$), значит, пусть боковые стороны равны $a$ и $b$ соответственно. Тогда общая протяжённость гор $\Rightarrow 2a+2b=4096$, откуда $a+b=2048$. Площадь гор $-$ $\frac{a\cdot a}{2}+\frac{b\cdot b}{2}$ (они прямоуг.) $=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}$. Нужно найти минимальное значение выражения, т.е. найти $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)_{min}$. Составим неравенство КБШ (нер-во о среднем) для $a^2$ и $b^2$:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \sqrt[2]{a^2b^2}, \quad \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|, \quad \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab.$$

+ 2б

Так как $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)$ не меньше $ab$, то $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)_{min}=ab$. Т.е.

$$\frac{a^2+b^2}{2}=ab \Rightarrow a^2-2ab+b^2=0, \quad (a-b)^2=0 \Rightarrow a=b.$$

Подставив в $a+b=2048$, получим $a=b=1024$, а $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)_{min}=ab=1024^2=1048576$

Задание 4 Ответ: 1.) 2 2.) 32 Решение:

Заметим, что чтобы подсчитать красоту числа $X$, нужно подсчитать кол-во пар натуральных чисел $a$ и $b$, таких, что $a$ - делитель $X$, $b$ - делитель $X$, $a \perp b$ и $ab=x$. ($\perp$ - знак взаимнопростости $\leftarrow$ НОД(1)

1.) 101 - простое число, значит, существует две удовлетворяющих условию пары: $a=1$ $b=101$ и $a=101$ $b=1$. Значит, красота числа 101 $\to$ 2.

2.) Заметим, что красота числа зависит от кол-ва делителей этого числа (было упомянуто выше). Также заметим, что красота тем больше, чем больше кол-во простых делителей числа (ведь если $a$-делитель, $b$-делитель, и нужно чтобы $a \perp b$, то нужно увеличить кол-во простых делителей). Заметим, что кол-во простых делителей у числа, меньшего 1024, максимально может быть 5; например, $6!$ (взяли простые делители, начиная с наименьшего, т.к. присутствуют ограничения $\leftarrow \leq 1024$) $7!$ брать нельзя, т.к. тогда $7! > 1024$. Значит, макс. кол-во простых делителей $-5$. Тогда рассмотрим одно из таких чисел. Пусть $6!$ Найдём его кол-во делителей: заметим, что если $q$-делитель, то $q=2^i\cdot 3^j\cdot 4^r\cdot 5^\omega\cdot 6^\perp$. Заметим, что $0 \leq i,j,r,\omega,\perp \leq 1$, т.е. каждый раз выбор из двух. Значит, кол-во делителей $-$ $2^5=32$ делителя. Покажем, что для каждого $a$ из этих 32-х делителей $a \perp \frac{6!}{a}$. Т.к. в множителем $a$ все числа входят в степенях не больше единицы, то в $\frac{6!}{a}$ они не входят. Значит, все числа из 32-х делителей (и $\frac{6!}{\text{это число}}$) являются парами. Значит, максимальная красота $-$ 32.

$-$ 2б

## Бланк ответов

Задание 3. Ответ: $24^{18}$ Решение:

Заметим, что каждая лунка имеет своё фиксированное, неизменное положение. Пусть фишки пронумерованы (это необязательно, просто пусть соблюдается порядок.). Рассмотрим фишку №1. Её можно положить в любую из 24 лунок, т.е. её можно разместить 24 способами. Рассмотрим фишку №2. Её также можно разместить в любую из 24 лунок. Рассмотрим фишку №i. Её всё также можно положить в любую из 24 лунок. Нам по условию неважно, сколько фишек лежит в каждой лунке. Тогда получаем, что для каждой из 18 фишек существует 24 варианта расстановки. По правилу комбинаторного умножения* получаем общее кол-во способов → $\underbrace{24\cdot 24\cdot\ldots\cdot 24}_{18\text{ раз}} = 24^{18}$ способов.

* Все фишки располагаются одновременно, поэтому комбинаторное умножение.

⊖

Бланк ответов