ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101316914942

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия МОСОЯН

Имя АННА

Отчество АРШАКОВНА

Дата рождения 13 03 2008

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 115

Телефон 89312458266

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101316914942

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	10	00	09						
Балл члена жюри №2	25	10	00	09						

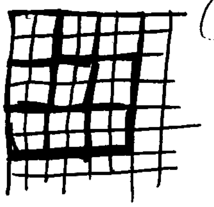
Итоговый балл 044

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

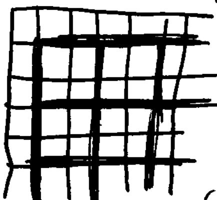
1) Для начала найдём сумму всех чисел в таблице.
Всего ячеек: $512 \cdot \cancel{10}\, 2048 = 2^9 \cdot 2^{11} = 2^{20}$. „Разделим" таблицу на квадраты 2x2 таким образом:



(то есть так, чтобы квадратики не пересекались и делили таблицу без остатка. Это удаётся сделать, т.к. $512 \cdot 2048 : 4$)
таких 4-ячейных квадратиков: $\dfrac{2^{20} \leftarrow \text{всего ячеек}}{2^2 \leftarrow \text{ячеек в 1 квадрате}} = \boxed{2^{18}}$

В каждом из этих 2^{18} квадратиков сумма чисел $= 64$. Следовательно, сумма всех чисел в таблице $= 2^{18} \cdot 64 = 2^{18} \cdot 2^6 = \boxed{2^{24}}$

2) Теперь „разделим" таблицу на квадраты 2x2 по-другому. Будем игнорировать периметр, „сумму" которого нужно найти. Разделим оставшуюся часть так же, как в первом пункте.



Проделаем те же операции, что и ранее, но для „внутренней" таблицы. Обратим внимание, что высота и ширина уменьшились одинаково: на 2.

$$\text{сумма всех чисел во внутренней таблице} = \underbrace{\frac{\overbrace{510 \cdot 2046}^{\text{ячеек всего}}}{4}}_{\text{квадратов } 2\times2} \cdot \underbrace{64}_{\text{сумма чисел в каждом квадрате}} = \boxed{2^6 \cdot 255 \cdot 1023}$$

$510 : 2 = 255$; $2046 : 2 = 1023$

1023×255: 5115, 5115, 2046 — 260865

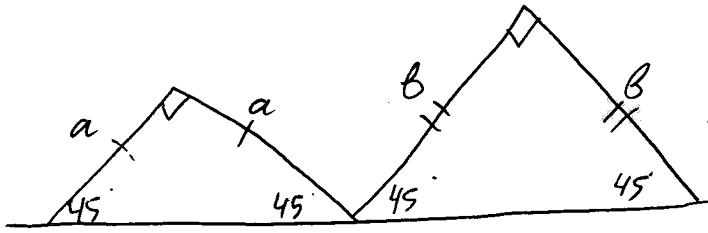
3) „Сумма чисел по периметру" = сумма всех чисел − сумма чисел во „внутренней" таблице.

$$P = 2^{18} - 2^6 \cdot 255 \cdot 1023 = 2^{18} - 2^6 \cdot 256 \cdot 1023 + 2^6 \cdot 1023 = 2^{18} - 2^6 \cdot 2^8 \cdot 1024 + 2^6 \cdot 1023 +$$
$$+ \cancel{1023}\, 2^{14} = 2^{18} - 2^{14} \cdot 2^{10} + 2^{14} + 2^6 \cdot 1023 = 2^{18} + 2^{14} - 2^{14} \cdot 2^{10} + 2^6 \cdot 2^{10} - 2^6 =$$
$$= 2^{18} - 2^{10}(2^{14} - 2^6) + 2^{14} - 2^6 = 2^{18} - 2^{16}(2^8 - 1) + 2^6(2^8 - 1) = 2^{18} - 2^6(2^8-1)(2^{10}-1) =$$
$$= 2^6(2^{12} - (2^8-1)(2^{10}-1)) = 64(4096 - 255 \cdot 1023) = 64 \cdot (4096 -$$

$$P = 2^{24} - 2^6 \cdot 255 \cdot 1023 = \cancel{2^6(2^{18} - 255 \cdot 1023) = 64(2^{18} - 260865)} =$$
$$= 2^{24} - 2^6(2^8 - 1)(2^{10} - 1) = 2^{24} - 2^6(2^{18} - 2^{10} - 2^8 + 1) = 2^{24} - 2^{24} + 2^{16} + 2^{14} - 2^6 =$$
$$= 2^6(2^{10} + 2^8 - 1) = 64(1024 + 255) = 64 \cdot 1279 = 81856$$

Ответ: $2^{24} - 2^6 \cdot 255 \cdot 1023 = \boxed{81856}$ (+) 25б

(2)



1. Углы по 45°, треугольники равнобедренные
⇓
они прямоугольные.

2. ∃ a – „сторона" одной горы, b – другой.

общая протяжённость $= a+a+b+b$
↓

$4096 = 2(a+b)$

$\underline{a+b=2048}$

3. площадь гор $= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$ ← должно быть минимальным
⇓
a^2+b^2 – минимальна.
(найти a^2+b^2 min)

4. выразим a через b:

$a = 2048 - b$
↓

$a^2+b^2 = \boxed{min}$

$(2048-b)^2+b^2 = min$

$2^{22} - 2^{12}b + 2b^2 = min$
⇓
разделим на 2 (значение всё ещё должно будет быть минимальным)

$2^{21} - 2^{11}b + b^2 = min_2$

$\underline{2^{21}} - b(b-2^{11}) = min_2$

? изменить нельзя

⇓ $b(b-2^{11})$ должно быть максимально большим, т.к. стоит со знаком минус. Хотелось бы сказать, что $b = 2048$ (~~или~~ близко к нему)

Но ~~очевидно, что те же рассуждения будут работать~~ и для a
То есть оба максимальны... но они ведь обратно пропорциональны.
Очевидно, что баланс достигается в момент, когда $a = b = \frac{2048}{2} = 1024$.
Тогда они оба „максимальны", а $a^2+b^2 = 2\cdot 1024^2 = 2\cdot(2^{10})^2 = 2^{22}$ – минимально

Ответ: 2^{22}

± 10 б

③

Бланк ответов

1. 3 Рассмотрим процесс выкладывания фишек в лунки. Для 1ой фишки есть 24 варианта позиционирования. Для второй тоже 24, т.к. кол-во фишек в лунке не ограничено. И так далее.

2. Ясно, что каждый вариант положения 1 фишки имеет много соответствующих ему вариантов в общем, следовательно:

Всего вариантов стартовых позиций для фишек $= 24^{18}$ (по одному из законов комбинаторики, не помню как называется)

кол-во фишек

кол-во вариантов для каждой фишки (на каждый из 24 вариантов позиции 1ой фишки есть 24 варианта для второй, для каждой из 24^2 пар первой и второй есть 24 варианта расстановки третьей, и так далее...)

(события не связаны (положения фишек друг от друга не зависят), так что никакие взломчасти не используются)

Ответ: 24^{18}

(−)

④ ① Число 101 - простое, у него всего 2 делителя: 1 и 101. Эта пара чисел и станет заветной, то есть красота числа 101 равна 1 (пусть 1 пара чисел)

(+) 4б

② Моя гипотеза: число должно состоять из произведения первых ~~степеней~~ простых чисел. Таким образом, любая комбинация делителей (их произведения) будет подходящей, т.к. все простые числа взаимно просты (их НОД = 1) и могут сочетаться без проблем.

Ясно; чтобы у числа было больше простых делителей, они должны быть как можно меньше. Начнём с самого начала:

$2\cdot3\cdot5\cdot7=210$; $210\cdot11>1024$, что уже не подходит.

красота числа 210 $= 4 + \frac{3!}{2} + 1$ $= 4+\frac{6}{2}+1=4+3+1=8$

(+) 5б

варианты
$2\cdot(3\cdot5\cdot7)$
$3\cdot(2\cdot5\cdot7)$
...

варианты
$(2\cdot3)\cdot(5\cdot7)$
...

делим на 2, т.к. одна комбинация эквивалентна 2 парам
$(2\cdot3)\cdot(5\cdot7)\leftrightarrow(5\cdot7)\cdot(2\cdot3)$

$1\cdot210$

На всякий случай рассмотрим, что будет, если одно из простых чисел-делителей будет иметь больше, чем первую степень:

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cancel{\ }$

(комбинации)

Очевидно, что при делении на пары чисел 2^2 будет вынужденно оставаться неразрывным на две двойки: иначе НОД чисел в комбинации будет не 1.

Ответ: 8

Бланк ответов