ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101038877271

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия КОЗЛОВА

Имя ПОЛИНА

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 13 03 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория ГУК401

Телефон 89826252117

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101038877271

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	03	00	25						
Балл члена жюри №2	00	03	00	25						

Итоговый балл 028

Подпись члена жюри №1 Шю

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 2

Пункт 1:

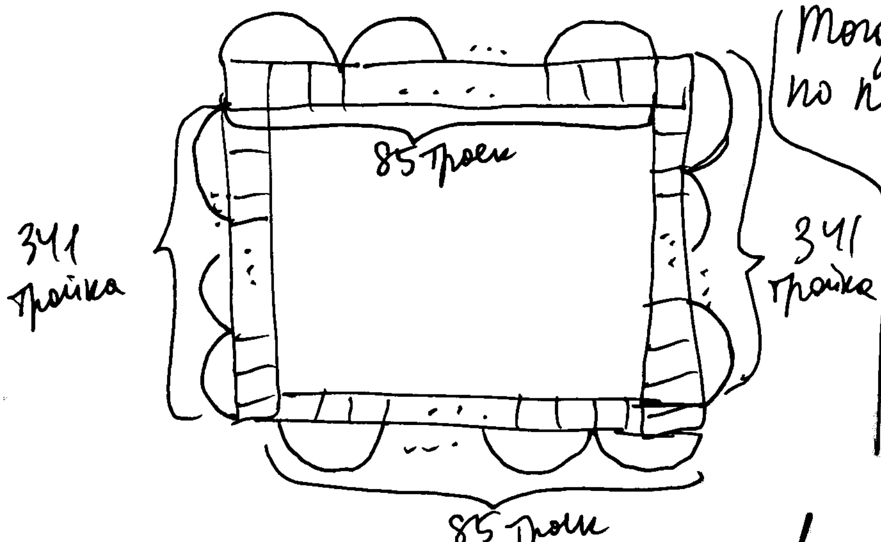
$n=256$, $m=1024$.

$256 \% 3 = 1$, $1024 \% 3 = 1$.

Это значит, что мы можем разбить 256 чисел на 85 троек и останется одно "лишнее" число, а 1024 на 341 тройку и тоже останется одно "лишнее число".

Но если бы мы могли разбить все числа в ряду на тройки и все числа в столбце на тройки, то среди этих троек угловые эл-ты повторялись бы два раза.

Т.е. в нашем случае, нужно разбить на тройки так, чтобы каждый угл. эл-т был только в одной:



Тогда сумма всех чисел по периметру равна

$(2\cdot 85+2\cdot 341)\cdot 32 =$

$= 852\cdot 32 =$

$= 27264$

Ответ$_1$: 27264.

+38

Задание 1.

$a, b \in \mathbb{Z}, \quad 1 \le a \le b \le 2048$

Кол-во (a, b): $\gcd(a, b) < a \operatorname{xor} b$ — ?

Решение: 1. Заметим, что $a \operatorname{xor} a = 0$ (т.к. все биты совпадают) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $a = b$ не выполняется, т.к. $\gcd \geqslant 1$.

2. Рассм случай, когда $a \oplus b = 1$: Такое возможно только тогда, когда $b = a + 1$ и $a \vdots 2$.
(т.к. все биты, кроме последнего, будут совпадать)

3. Т.к. $\gcd(a, b) \geqslant 1$ и из п 1, 2 $\Rightarrow$ для любого a: $1 \le a \le 2048$, будут подходить все $a < b \le 2048$

И если a - четное, то $b = a + 1$ не будет подходить

~~4. Для всех ост. случаев $\gcd \ge \operatorname{xor}$, т.к. xor будет больше~~

Получаем, что
для $a = 1$ 2047 возможных b,
для $a = 2$ 2045 возможных b,
для $a = 3$ 2045 b,
для $a = 4$ 2043 b и т.д.

т.е. для нечетных a $S^1_{a/n} = \dfrac{2 \cdot 2047 - 2 \cdot (1024 - 1)}{2} \cdot 1024 =$

$= \dfrac{2047 + 1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{1024}^{512} = 2^{11} \cdot 2^{9} = 2^{20}$

для четных a $S^2_{a/n} = \dfrac{2045 + 0}{\cancel{2}} \cdot \cancel{1024}^{512} = 2045 \cdot 2^{9}$

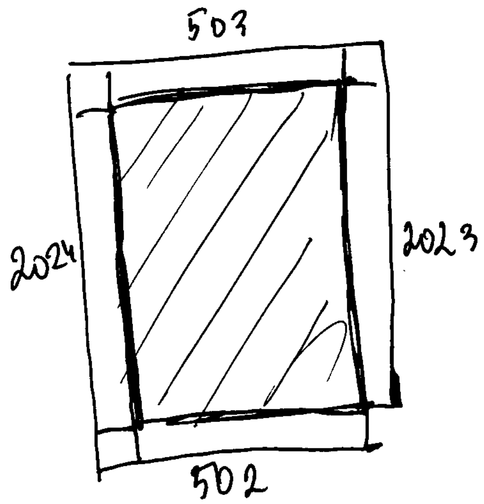
$S^1 + S^2 = 2^{20} + 2045 \cdot 2^{9} = 2^{9}(2^{11} + 2045) =$

$= 2^{9} \cdot (2048 + 2045) = 2^{9} \cdot 4093$

Ответ: для $2^{9} \cdot 4093$ пар.

Продолжение задания 2.

Пункт 2: $n=503$, $m=2024$, но один уголок вырезан



1. Чтобы найти S чисел по периметру нужно из суммы всех вычесть сумму чисел в закрашенном внутр прямоуг-ке.

2. $N_{all} = 2024 \cdot 503 - 1 =$
$= 1018072 - 1 = 1018071.$
— количество квадратиков

3. Найдем S цифр этого числа: $1+1+8+7+1 = 8+8+2 = 18 \vdots 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1018071 \vdots 3 \Rightarrow$ исход. фигуру можно разбить на тройки $\Rightarrow$
$\Rightarrow S_{all} = 32 \cdot \frac{1018071}{3} = 32 \cdot 339357$

4. Рассм внутр ~~квадр~~ прямоуг: $n' = 503 - 2 = 501 \vdots 3$
$m' = 2024 - 2 = 2022 \vdots 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ его тоже можно разбить на тройки $\Rightarrow$
$\Rightarrow S_{\square} = 32 \cdot \frac{501 \cdot 2022}{3} = 32 \cdot 167 \cdot 2022$ −

5. Тогда $S_p = S_{all} - S_{\square} = 32 \cdot 339357 - 32 \cdot 167 \cdot 2022 =$
$= 32(339357 - 338274) = 32 \cdot 1083 = 34656$

Ответ: 34656.

Задание 4.

Пункт 1: $F(7,7) = ?$

$F(7,7)$ – сумма всех наиб. делителей чисел вида x и $x+7$, т.е отличающихся на 7.

Каждое 7е число $\vdots 7 \Rightarrow$ за 7 шагов цикла подойдет только одно, в ост. случаях $gcd = 1$:

$F(7,7) = gcd(1,8) + gcd(2,9) + gcd(3,10) + gcd(4,11) + gcd(5,12) + gcd(6,13) + gcd(7,14) =$

$= 6 \cdot 1 + 7 = 13$ + 1 б

Ответ$_1$: 13.

Пункт 2: $F(1024, 1024) = ?$

$1024 \vdots 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024.$

i принимает значение от 1 до 1024.

1) Тогда если i – степень двойки ≤ 1024, то $gcd(i, i+1024)$ будет само число i

(напр $i=2$: $gcd(2, 1026) = 2$, $i = 1024$: $gcd(1024, 2048) = 1024$)

2) Если i – четное, то $gcd(i, i+1024)$ – 2 в максимальной степени вхождения 2 в i

(напр. $36 = 2^2 \cdot 3$, $gcd(36, 1060) = 2^2$)

Эти два случая можно объединить (2 включ. в себя 1)

~~И тогда для напр. ...~~

Рассм все четные числа. Их $1024 : 2 = 512$ штук

Для всех нечетных $gcd = 1$.

Поставим все четные в ряд и пронумеруем:

чис 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52...

№ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26...

1) Для всех чисел под нечетными номерами $\boxed{gcd = 2.}$ Их 256 шт.

2) Тогда для каждого 4го начиная со 2го номера $gcd = 4$,

3) для кажд. 8го начиная со 4го номера $gcd = 8$,

Прод. задания №4

4) для конца. 16-го пол. с №8 gcd = 16

5) 32-го с №16 gcd = 32

6) 64 го с №32 gcd = 64

7) 128-го с №64 gcd = 128

8) 256-го с №128 gcd = 256

9) 512-го с №256 gcd = 512

10) и для i=1024 gcd = 1024. (под №512)

Найдем теперь сумму gcd (по группам):

0) нег. : $S = 512 = 2^9$

1) $S_2 = 2 \cdot 256 = 512 = 2^9$

2) S_4 последний подходящий с gcd = 4 это №510 (num = 1020)

$\Rightarrow$ всего их $\frac{510-2}{4} = \frac{508}{4} = 127 + 1 = 128$ -

$\Rightarrow S_4 = 4 \cdot 128 = 2^9$

3) посл gcd = 8 это №508 (num = 1016) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего их $\frac{508-4}{8} = \frac{504}{8} = 63 \Rightarrow S_8 = 63^{+1} \cdot 8 = 64 \cdot 8 = 2^9$

4) посл gcd = 16 №504 $\Rightarrow$ всего их $\frac{504-8}{16} = \frac{496}{16} = 31 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{16} = 31^{(+1)} \cdot 16 = 32 \cdot 16 = 2^9$

5) посл gcd = 32 №496 $\Rightarrow$ всего их $\frac{496-16}{32} = \frac{480}{32} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{32} = 15^{+1} \cdot 32 = 16 \cdot 32 = 2^9$

6) посл gcd = 64 №480 $\Rightarrow$ всего их $\frac{480-32}{64} = \frac{448}{64} = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{64} = 7^{+1} \cdot 64 = 8 \cdot 64 = 2^9$

7) посл. gcd = 128 №448 $\Rightarrow$ всего их $\frac{448-64}{128} = \frac{384}{128} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{128} = 3^{+1} \cdot 128 = 4 \cdot 128 = 2^9$

8) посл gcd = 256 №384 $\Rightarrow$ всего их $\frac{384-128}{256} = \frac{256}{256} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{256} = 256(1^{+1}) = 256 \cdot 2 = 2^9$

9) посл gcd = 512 под №256, он посл и единственный :) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{512} = 512 = 2^9$ как и $S_{1024} = 1024 = 2^{10}$

продолжение задания 4:

$S_{all} = 2^9 \cdot 10 + 2^{10} = 512 \cdot 10 + 1024 = 5120 + 1024 =$

$= 6144$

+24 б

Ответ: 6144.