ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101974417347

Титульный лист

Направление	☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11
Фамилия	ХУРЛАПОВА
Имя	МАРИЯ
Отчество	АЛЕКСАНДРОВНА
Дата рождения	17 05 2006
Город участия	ЕКАТЕРИНБУРГ
Аудитория	338
Телефон	89532888818
Дата	05 02 2024
Подпись	

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101974417347

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 2 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	0	–					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	–					

Итоговый балл 30

Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 3

есть числа 1,2,3,4,5,6,7,8.

они стоят по кругу, причем каждое число делится на разность соседей.

Найдем, какие числа на какие делятся (делители каждого числа)

1 делится на 1
2 делится на 1,2
3 делится на 1,3
4 делится на 1,2,4
5 делится на 1,5
6 делится на 1,2,3,6
7 делится на 1,7
8 делится на 1,2,4,8

известно, что 2 и 5 стоят рядом

2
5

С одной стороны
т.к. каждое число делится на разность соседей, то рядом с 5 либо
1) 7 (чтобы разность была 7-2=5), либо
2) 3 (чтобы разность была 3-2=1)
3) 1 (чтобы разность была 2-1=1)

С другой стороны
рядом с 2 должна стоять либо 1) 6 (6-5=1)
2) 4 (5-4=1)
3) 7 (7-5=2)

~~Рассмотрим дни ему~~
Рассмотрим случай №1 из стороны 1

1) рядом с 5 стоит 7

2
5
7

=> рядом с 7 может стоять только 6 или 4
т.к. 6-5=1
5-4=1, а 7 делится только на 7 либо саму себя, а ~~числа~~ цифры 12 у нас нет

после 7 стоит 6

2
5
7
6

после 6 может быть ~~1,2,3~~
1) 8 (8-7=1)
2) 4 (7-4=3)

Забыто
3) 1 (7-1=6)

после 7 стоит 4

2
5
7
4

после 4 может быть
1) 6 (~~6~~ 7-6=1)
2) 8 (8-7=1)
3) 3 (7-3=4)
4) 5 не может быть, уже используется

после 6 стоит 8

2
5
7
6

~~делители~~

продолжение на след.

после 6 стоит 4

наш случай

продолжение на след.

после 6 стоит 8

2 5
7
6
8

делители 8 : 1,2, 4,8

разность 8 быть не может, т.к. 8 - max число

разность 4, если после 8 стоит 2, но 2 уже использовано ⇒ такое невозможно

разность 2, если после 8 стоит 4

разность 1, если после 8 стоит 5 или 7 но они уже использованы ⇒ невозможно ⇒ после 8 стоять только 4 может

после 8 стоит 4

2 5
7
6
8
4

⇒ делители 4: 1,2, 4

разность 1 быть не может, т.к. 7 уже использована

разность 2 невозможна, т.к. 6 уже использована

разность 4 невозможна, т.к. 4 уже использована

⇒ после 8 не может стоять 4, а после 6 не может стоять 8

⇒ если после 7 стоит 6, то 4 и 6 стоят рядом

цифры после 4

6 +

2 5
7
4
6

наш случай!

8 +

2 5
7
4
8

делители 8: 1,2,4,8

разность 1: 5 не может быть уже используется
3 может быть

разность 2: 6 может быть
2 уже использ.

разность 4 не может быть

разность 8 не может быть

3 +

2 5
7
4
3

разность 1 не может быть 5,3 использ.

разность 3 может быть при цифре 1, т.к. 7 использ.

Бланк ответов

8

2 5 7 4 8

после 8

3 6

2 5 7 4 8 3

разность 3 быть не может, 5 используется,

разность 1 тоже, т.к. 7 используется ⇒ невозможно

2 5 7 4 8 6

разность 6 не может 2 используется

разность 3 быть не может 5 используется

разность 2 быть не может, 8 исп.

разность 1 не может, 7 использ

⇒ этот вариант невозможн.

3

2 5 7 4 3

после 3 - 1

получим 2 5 7 4 3 1

после 1 разность 1 быть не может, т.к. 2 уже используется

⇒ этот вариант невозможен

Рассмотрев все случаи, где после 5 стоит 7 мы пришли к выводу, что возможны только те варианты, где 6 и 4 стоят рядом

2) после 5 стоит 3

2 5 3

после 3 стоит либо 2 (не может, использовано) либо 4 либо 6 либо 8

~~если~~ после 3 → 4

2 5 3 4

после 4 может стоять

1) 7 ~~8~~

2) 1

после 3 стоит 6

2 5 3 6

после 6 может стоять 1, 4

после 4 стоит 7 или 1

после 6 стоит 1 или 4

7 | 1 | 1 | 4

2 5 3 4 7

2 5 3 4 1

2 5 3 6 1

2 5 3 6 4 наш случай

после 7 стоять может только 3 и 5, но они уже используются

после 1 может стоять 3 и 5 но они уже используются

⇒ такой вариант невозможен

после 1 может стоять только 7, 5 уже использовано

7

2 5 3 6 1 7

после 7 может стоять 8

8

2 5 3 6 1 7 8

осталось только 4, но 7-4=3 а $8 \not\vdots 3$

⇒ невозможно

таким образом, мы доказали, что если после 5 стоит 3, то возможны варианты только с 4,6 рядом

Остался последний случай, когда после 5 стоит 1

2 5 1

после 1 может стоять только 6 и 4

после 1 стоит 6

после 1 стоит 4

Бланк ответов

после 1 → 6

2 5 1 6

после 6 → 1) 7
2) 4
3) 3

2 5 1 6 7

после 7 может стоять только 5, 7, но они уже используются ⇒ такой вариант невозможен

2 5 1 6 4

наш вариант

2 5 1 6 3

после 3 может стоять 1) 7

2 5 1 6 3 7

после 7 может быть 4

2 5 1 6 3 7 4

остается число 8, оно замыкает круг но 8-5=3, это ≠ 3 ⇒ невозможно

после 1 → 4

2 5 1 4

после 4 → 2
3

после 4 → 2 невозможно, т.к. 2 уже использ.

2 5 1 4 2

~~после 2 может быть~~ 6,3

6

2 5 1 4 2 6

3

2 5 1 4 2 3

остались

после 4 → 3

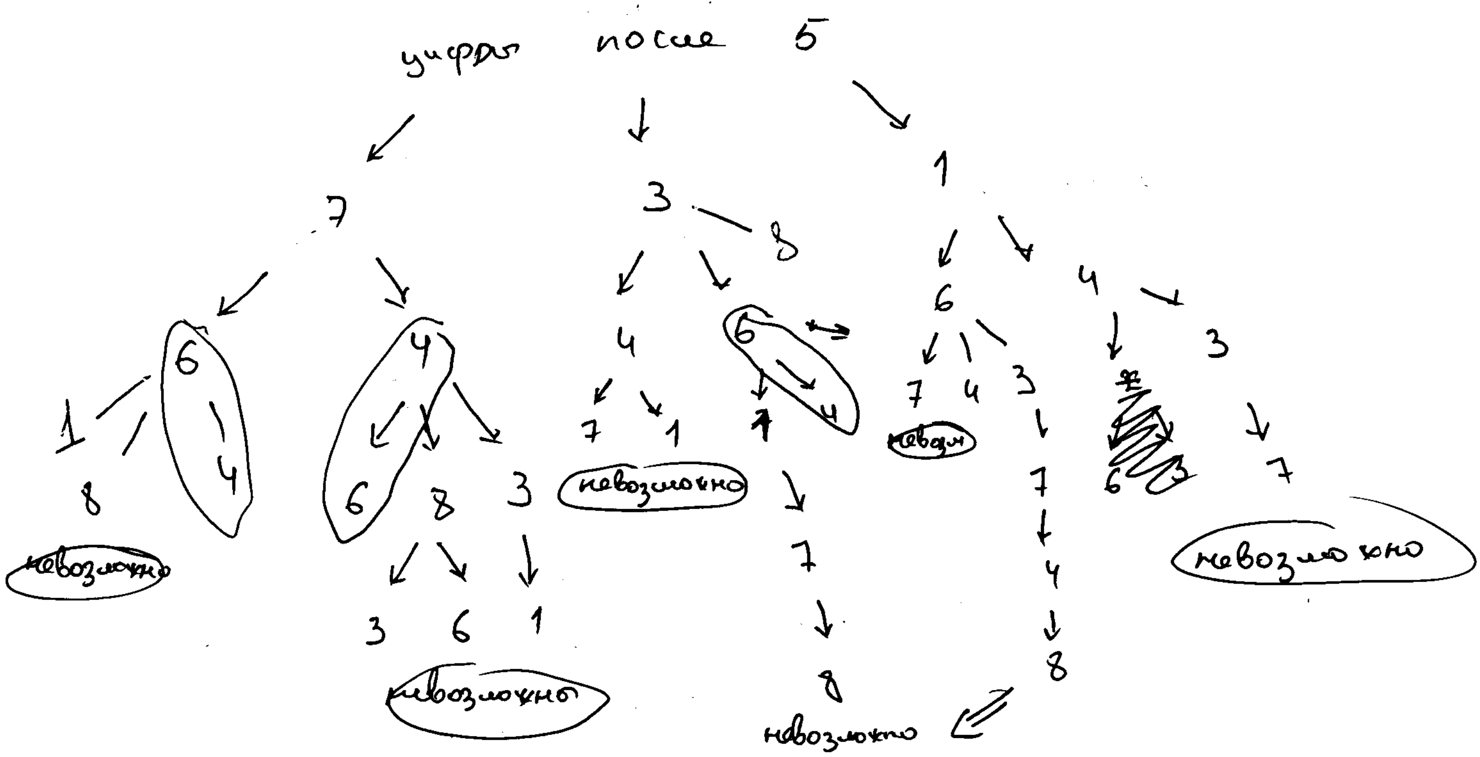
2 5 1 4 3

после 3 может быть 7 и все

2 5 1 4 3 7

после 7 ничего поставить невозможно, т.к. возможные цифры уже используются, ~~7~~ -

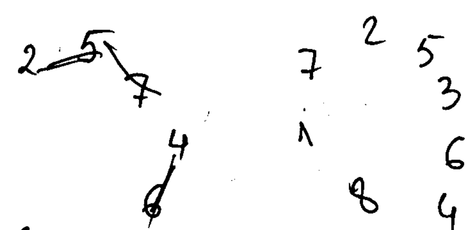
Итоговая схема



убед., не все

Таким образом, мы рассмотрели все варианты и доказали, что во всех случаях, где 6 и 4 не стоят рядом, замкнуть такой ряд невозможно

Приведем пример, чтобы доказать, что 6 и 4 могут стоять рядом



← доказано

ч.т.д.

630

1260

1260
66

1194 | 12
108 | 9
114

1266 | 2

1266
66
1332

Дополнительный бланк № 1

Задача 1

Посчитаем сумму всех чисел от 1 до 36

$$\cancel{1}+\cancel{2}+\cancel{3}+\cancel{4}+\cancel{5}+\cancel{6}+\cancel{7}+\cancel{8}+\cancel{9}+\cancel{10}+\cancel{11}+\cancel{12}+\cancel{13}+\cancel{14}+\cancel{15}+\cancel{16}+\cancel{17}+\cancel{18}$$

45 55 135 ~~190~~

$$+\cancel{19}+\cancel{20}+\cancel{21}+\cancel{22}+\cancel{23}+\cancel{24}+\cancel{25}+\cancel{26}+\cancel{27}+\cancel{28}+\cancel{29}+\cancel{30}+31+32+33+\cancel{34}+35+\cancel{36}$$

210 325 435 535

$$570+96=666$$

по условию дано, что числа

должны быть последовательные их сумма

=> суммы должны получиться

пусть X - первое число в последовательности сумм чисел, когда за ним будет еще 11 слагаемых до $X+11$

$$X+X+1+X+2+X+3+X+4+X+5+X+6+X+7+X+8+X+9+X+10+X+11+$$

каждое число в таблице входит в 2 суммы (по вертикали и по горизонтали) => оно зачтено дважды +

$$\Rightarrow 12x+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=666\cdot 2$$

$$666\cdot 2=1332$$

$$12x+66=1332$$

$$1332-66=1266$$

$$12x=1266$$

$$X=1266:12$$

$$X=1266 / 12$$

$$1266:12=105\ (\text{ост. } 6)$$

=> невозможно найти такое число, которое образовало бы 12 последующих за ним целых чисел, которые являлись бы 12 суммами чисел по вертикали и горизонтали

Ответ: нет, нельзя расставить так числа

Задание 4

Посчитаем количество клеток на сметатой доске, всего их $8 \times 8 = 64$ клетки

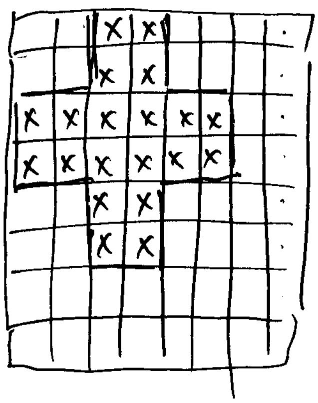
Один оборотень за 1 раз бьет не больше 5 клеток
$\Rightarrow$ самое минимальное теоретически возможное число оборотней равно $64 : 5 = 13$ оборотней, (остаток при делении на 5 равен 4, но их тоже нужно побить $\Rightarrow$ нужно хотя бы 13 оборотней

Чтобы оборотень бил клетки, ему нужно пространство 5 на 5. Соответственно, какие-то оборотни будут накладываться на друг друга

Не накладываясь на друг друга 4 оборотня могут образовать следующий крест

7	9	1	5	7	9	17	21
2	10	2	10	2	10	18	22
1	16	1	9	1	16	17	21
6	15	2	10	6	15	18	22
5	11	1	11	5	11	19	23
3	12	3	12	3	12	20	24
4	13	4	11	4	13	19	23
8	14	3	12	8	14	20	24

~~Задание~~
пример на раскраску 24 оборотнями

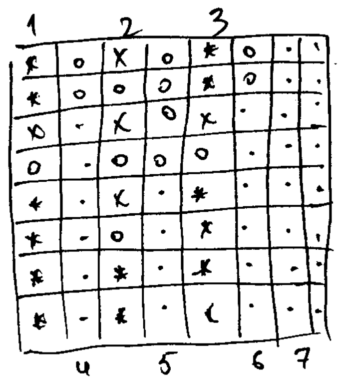


неверно

На каждый столбец необходимо хотя бы 4 оборотня $\Rightarrow$ максимальное число оборотней $4 \cdot 8 = 32$

$\Rightarrow$ у нас от 13 до 32 оборотней

в каждое пространство 5 на 5 можно поставить не более одного оборотня. Почему? Найдем кол-во пространств 5×5 на доске 8 на 8 всего таких 16 пространств Почему? Это что?



3 столбца заполнили 8 оборотней (1, 2, 3)
3 столбца также заполнили 8 оборотней (4, 5, 6)
столбец №7 заполнило 4 оборотня
столбец №8 заполнило 4 оборотня $\Rightarrow$ пример на 24 оборотня

Дополнительный бланк №2

Задание 2

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Док-ть, что $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+$

$+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq 2\sqrt{abc}$

Аналогично рассмотрим

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}=a\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2}$

из р-ства получим, что

$1-b^2-c^2=a^2+2abc$

$\Rightarrow$ подставим под корень, получим

$a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}=a\sqrt{(a+bc)^2}=$

$=a(a+bc)$, т.к. $a>0$, $b>0$, $c>0$ $\Rightarrow$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}=a^2+abc+$

рассмотрим $c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

под корнем $\sqrt{1-b^2-a^2+a^2b^2}$

из равенства $1-b^2-a^2=c^2+2abc$

под корнем получим $\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2}$

$\Rightarrow$ под корнем $\sqrt{(c+a^2b^2)^2}$

т.к. $c>0$, $a>0$, $b>0$, то ~~под корнем~~ уберем корень, получим $c+a^2b^2$

$\rightarrow c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=c\cdot(c+a^2b^2)=$

$=c^2+a^2b^2c+$

и из третьего получим, что

$b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}=b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2bc^2}$

но из равенства следует, что

$1-c^2-a^2=b^2+2abc+$

подставим, получим $b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2}=b\sqrt{(b+ac)^2}=$

т.к. $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $=b(b+ac)=b^2+abc+$

Суммируя, получим

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a^2+abc$

$b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} = b^2+abc$

$c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = c^2+abc$

=> получим, что нужно доказать, что

$a^2+b^2+c^2+3abc \geq 2\sqrt{abc}$

Не доказано

Пусть $abc = 0.25$
Тогда $\sqrt{abc} = \sqrt{0.25} = 0.5 > 0.25$

т.к. $3abc > 2\sqrt{abc}$, , т.к. $a>0$, $b>0$, $c>0$ $\frac{abc > \sqrt{abc}}{3>2}$

а также $a^2>0$, $b^2>0$, $c^2>0$ по усл., т.к. $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

неравенство $a^2+b^2+c^2+3abc \geq 2\sqrt{abc}$ доказано

ч.т.д.