ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101632410252

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КОНОНЕНКО

Имя АНДРЕЙ

Отчество ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 29 10 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 628

Телефон 89296074516

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101632410252

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	0	–					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	–					

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1 [signature] **Подпись члена жюри №2** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

N1

Назовем S_i - сумму чисел в i-строке.
Назовем S_k - суммы чисел в K-столбце

	S_{1k}	S_{2k}	S_{3k}	S_{4k}	S_{5k}	S_{6k}
S_1						
S_{1+1}						
S_{1+2}						
S_{1+3}						
S_{1+4}						
S_{1+5}						

1) Сумма чисел во всех столбцах $= S_{1k}+S_{2k}+S_{3k}+S_{4k}+S_{5k}+S_{6k} =$
$= S_{\text{арифм прогрессии } 36} = \frac{a_1+a_{36}}{2}\cdot 36 = \frac{1+36}{2}\cdot 36 = 18\cdot 37$

2) Аналогично П1: $S_{i1}+S_{i2}+S_{i3}+S_{i4}+S_{i5}+S_{i6} = 18\cdot 37$

3) Пусть $x_1<x_2<x_3\ldots<x_{11}<x_{12}$, где x_i ~~номер~~ сумма чисел в i-том строке/столбце (строки и столбцы считаются вместе). Тогда, т.к. x_i составляют в некотором порядке последовательные числа, то $x_{i+1}=x_i+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{12} x_i = 12x_1 + \frac{1+11}{2}\cdot 11 = 12x_1+66$.

4) Из П1и2 $\Rightarrow$ сумма чисел во всех строках и столбцах $=$
$= 18\cdot 37+18\cdot 37 = 36\cdot 37$

5) Из П3 $\Rightarrow$ сумма чисел во всех строках и столбцах $= 12x_1+66$

6) Из П4и5 $\Rightarrow$ $12x_1+66 = 36\cdot 37 \mid :6$

$2x_1+11 = 6\cdot 37$

$6\cdot 37 - 2x_1 = 11$

$222 - 2x_1 = 11$

$2x_1 = 211$

7) т.к. $x_1 \in \mathbb{N}$ (сумма нат. чисел - натуральное число) $\Rightarrow 2x_1 \neq 211$
Т.к. уравнение $36\cdot 37 = 66+12x_1$ не решается в натуральных числах всегда $\in[1;36]$, то такие числа расставить в квадрате 6х6 нельзя.
Ответ: нет.

Дано: №2

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$a;b;c>0$

Док-ть:

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

Док-во:

1) т.к. $a;b;c>0$ (по усл) $\Rightarrow abc>0 \Rightarrow \sqrt{abc} \geq 0 \in \mathbb{R}$

и можно внести под корень:

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}=\sqrt{a^2(1-b^2)(1-c^2)}$ и т.д.

$\boxed{2)\ a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}= \\ =\sqrt{a^2(1-b^2)(1-c^2)}+\sqrt{b^2(1-c^2)(1-a^2)}+\sqrt{c^2(1-a^2)(1-b^2)}}$

3) $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=a\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2}+$
$+b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}+c\sqrt{1-b^2-a^2+a^2b^2} \ominus$

3.1) $1=a^2+b^2+c^2+2abc \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3.2) $\ominus\ a\sqrt{a^2+b^2+c^2+2abc-b^2-c^2+b^2c^2}+b\sqrt{a^2+b^2+c^2-c^2-a^2+2abc+a^2c^2}+c\sqrt{a^2+b^2+c^2+2abc-a^2-b^2+a^2b^2}=$

$=a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}+b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2}+c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2}=a\sqrt{(a+bc)^2}+b\sqrt{(b+ac)^2}+c\sqrt{(c+ab)^2}=$

$=$ (т.к. $a;b;c>0 \Rightarrow c+ab;a+bc;b+ac>0$) $a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)=$

$=a^2+abc+b^2+abc+c^2+abc=a^2+b^2+c^2+2abc+abc=1+abc$

4) сравним $1+abc$ и $2\sqrt{abc}$ $\uparrow^2$ ($abc;2\sqrt{abc}>0$ п 1)

$1+2abc+(abc)^2 \geq 4abc$

$1-2abc+(abc)^2 \geq 0$

$(1-abc)^2 \geq 0$

5) Из п 4 $\Rightarrow a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$,

где $a;b;c>0$; $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Ч.Т.Д.

+

№3

Дано:
1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
$x_i : |x_{i+1} - x_{i-1}|$

Док-ть:
$x_i = 4$
$x_{i+1} = 6$

Решение:

1) x_1
5 2 x_2

Т.к. 5 и 2 - соседние числа, то пусть 5 это x_1; а 2 = x_2 => ~~2~~ 5 : |2 - x_0|. Т.к. 5 - простое число, то 5 делится либо на себя, либо на 1 =>

=> $\left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = 7 \end{array}\right.$

2) Аналогично п 1: $\left[\begin{array}{l} x_2 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_2 = 7 \\ x_2 = 6 \end{array}\right.$

3) Заметим, что число 7 - простое, а значит, что
пусть 7 = x_k
$|x_{k+1} - x_{k-1}| = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 7 \end{array}\right.$ => x_{k+1} и x_{k-1} это 8 и 1; 1 и 2; 2 и 3; 3 и 4; 4 и 5; 5 и 6; ⊗

3.1) Заметим, что если 8 = x_n; то $|x_{n+1} - x_{n-1}| = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}\right.$

4) Рассмотрим каждый случай в ⊗ по порядку:

4.1)

а.1 и 6 3 5 2
8 7 1 4 6

а.2 4 3 5 2
6
1 7 8

тогда мы можем однозначно определить 3 рядом с 5, в случае а.1 в случае подстановки ~~из~~ числа 4 и 6 поровну - условие не выполняется, а если подставить все выполняется. В случае а.2 ни при каком варианте подстановки не будет выполнятся условия

5). Аналогично П 3-4.1:*

В каждом случае из ⊗ если найдётся ~~только единственный~~ случай, который будет выполнять условие, то в каждом из этих случаев 4 и 6 будут стоять рядом. (кроме а.1 нет больше таких случаев.)

*в каждом случае из ⊗ не доказано мы можем однозначно или двузначно узнать порядок числа 7 и других 3 чисел. Дальше, расположение чисел 4 и 6 мы знаем однозначно.

7) Из П 1 4 5 => 4 и 6 всегда стоят рядом числа 4 и 6

6) Из П 5 => что мы можно точно определить порядок 6 чисел (кроме 4 и 6): рассмотрены частные случаи И. П. С. 8.

3 5 2

8 1 7, и, точно известно, что 4 и 6 — стоят рядом

№4

1) Заметим ~~что~~ что данных фигур не может быть меньше, чем 13, т.к. $64 \leq 5k$, где k - кол-во таких фигур.

2) Рассмотрим угловые случаи: в квадратиках ⊞ в углах большого

Бланк ответов