ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302376283756

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия	НИКИТИНА
Имя	КИРА
Отчество	СПАРТАКОВНА
Дата рождения	29 03 2006
Город участия	ЧЕБОКСАРЫ
Аудитория	206
Телефон	89218378912

Дата 05 02 2024 Подпись

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302376283756

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	20	0					
Балл члена жюри №2	20	20	6	20	6					

Итоговый балл 66

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1 Вариант

Бланк ответов

№2

$a^2+b^2+(c^2+2abc)=1$

Выделим полный квадрат относительно переменной c

$a^2+b^2+(c+ab)^2-a^2b^2=1$

$(c+ab)^2=1-a^2-b^2+a^2b^2=(1-a^2)(1-b^2)$

Отсюда и из положительности чисел

$c+ab=\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

Из симметрии следует, что также можно доказать

$b+ac=\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}$

$a+bc=\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}$

Осталось доказать что $a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)\geq 2\sqrt{abc}$

Делаем равносильные переходы

$a^2+b^2+c^2+3abc\geq 2\sqrt{abc}$

подставляем тождество из условия

$1+abc\geq 2\sqrt{abc}$

$(1-\sqrt{abc})^2\geq 0$ – что очевидно. Так как преобразования равносильные, эти ~~вывод~~ неравенства, записанные в обратном порядке, являются доказательством исходного неравенства.

+

Бланк ответов

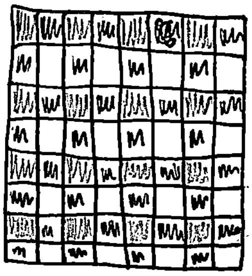
На доске

№4

32 белых и 32 черных клетки, перекрасим 16 из белых в желтые, так чтобы соседство по углам 2-х белых или 2-х желтых небыло. А также 16 черных перекрасим в синий. Фигура „оборотень" бьет 5 клеток только своего из 4-х цветов, причем 5 штук, тогда 3-х оборотней на желтом не хватит, чтобы побить все желтые, а 4-х хватит (показано на рисунке буквой „О") итак для каждого из четырех цветов минимально необходимо 4 оборотня. Всего 16

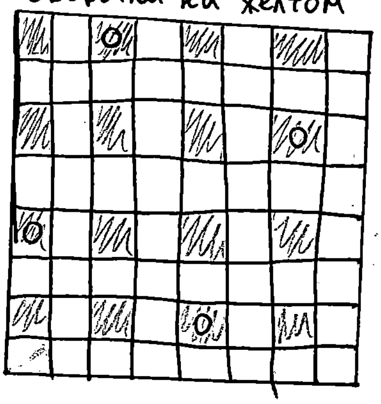
Ответ: 16

Деление на клетки разных цветов



— желтый

Оборотни на желтом



— желтый

+

№1

Сумма всех чисел в таблице $S = 1+2+\ldots+36 = \frac{(36+1)\cdot 36}{2} = 37\cdot 18$

Пусть 12 сумм - это $a, a+1, \ldots a+11$. В этих суммах каждая клетка участвует дважды, значит сумма 12 чисел $2S$.

$2S = a+(a+1)+\ldots+(a+11) = \frac{(2a+11)\cdot 12}{2} = 12a+66$ верно

$S = 6a+33 = 37\cdot 18$ слева число нечетное, справа четное => противоречие +

Ответ: нельзя.

№3.

Пусть числа 4 и 6 стоят рядом.

Нечетные числа делятся либо на себя либо на 1, значит рядом с ними должны быть числа, чья ~~разница~~ разность равна данному нечетному числу, или числа, чья разность равна 1.

Предположим, что 52 и 64 стоят рядом. Тогда возможны следующие варианты

1) 2564 – противоречие условию

2) 2546 – противоречие условию (подставляемые числа единственно возможные по условию)

3) 5264 подходит, дальше будет 52647 => 526473 => 5264738, потом нужно будет подставлять 1 => противоречие условию

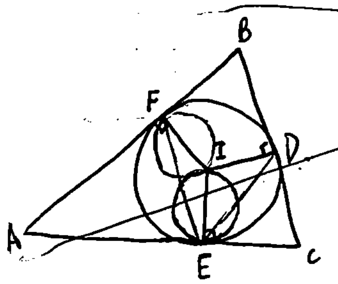
4) 5246 подходит, ставим далее подходящие по условию числа 52461 => 524617 => 5246178 =>

=> 5 2 4
3 6
8 7 1

Противоречий нет, данный круг соответствует условию. Числа 4 и 6 стоят рядом, что и требовалось доказать.

Бланк ответов

№5.



AB⊥FI (т.к. FI - радиус ~~вписанно~~ окружности, опущенный к касательной AB)

△FIE и △DIE равнобедренные (т.к. FI и IE и ID радиусы)

№3

По расстановке нечетные разбиваются на пары?, стоящие рядом и окружены четными (т.к. нечетные делятся на четные)?; по соседству с каждым нечетным должны стоять числа разной четн.

1) Пары четных и нечетных чередуются. Нет пары 2 и 8 (тогда 2 должно делиться на 8-5). Тогда нет и пары 4,3,7). Противоречие

А) Если рядом 4 3 8, то каждое из них должно иметь нечетный делитель, этот делитель может быть только 1, значит последовательно стоят 7 4 8 3 (т.к. 5 уже занято). Получается подряд 5 2 6 1, тогда рядом 1 именно 7 - противоречие, 7 не делится на 4-1.

Б) Если рядом 6 и 8, то рядом с 8 стоит 7, рядом с 6 нечетное, но не 5 - 6 не делится на разность 8 и этого числа.

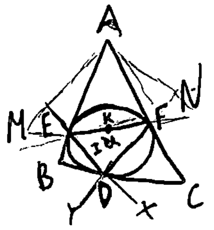
2) Есть тройка четных, потом пара нечетных, потом одинокое четное

А) Если эта тройка содержит 2, но она не 2, 6, 4, то она содержит 8 и не рядом с 4 почему? 284 Получается подряд 8 2 4 5, 8 должно делиться на разность 4 и нечетного значит подряд 3 8 2 4 5. Через число как с 5, так и с 3 соседствует одна из разностей равна 3, но 7 и 1 на 3 не делятся.

Б) Если эта тройка не содержит 2, то она решает 4, 6, 8. Если 8 стоит между 4 и 6, то 4 делится на разность 8 и нечетного, значит подряд 7 4 8 6, 6 делится на разность 8 и нечетного, значит рядом 5, тогда дальше 2, нет двойки нечетных подряд. Значит 4 и 6 не разделяются числом 8, они стоят рядом, что и требовалось доказать.

перебор неполный

№5



$\angle A$ равен 2α
$\angle B = 2\beta$
$\angle C = 2\lambda$

~~ВИ~~ МУО (не умаляя общности)
точка K такая, что угол $FK\cancel{A}I = 90^\circ$, $\angle EKI = 90^\circ$
K проекция I FE, т.к. FE – хорда
а I – центр $\Rightarrow$ K – середина FE ✓
$MF = FA$ (из симметрии)
$ME = EA$ (из симметрии)
$FA = EA$ (как касательные к окружности) $\Rightarrow MF = ME$?
$\angle MFK = \angle NFX + \angle XFA + \angle AFE \overset{?}{=} 2\cdot\angle AFX + \angle AFE = 2\angle EFD + \angle AFE =$
$2(90-\beta) + 90 - \alpha = 90 + \alpha + 2\lambda = 180^\circ$
$\angle MEF = 360^\circ - \angle MEY - \angle YEA - \angle AEF = 360 - 2\angle ED - \angle AEF = 360^\circ - 2(90-\lambda)$
$+ 90 - \alpha = 360 - (270^\circ - (2\lambda + \alpha)) = 90 + \alpha + 2\lambda = 180^\circ \Rightarrow \angle MEF = \angle MFK$
$FK = KE$
$MF = ME$ $\Rightarrow$ CE под ~~разными~~ равные отрезки образуют в равными углами MFNE – параллелограмм
тогда диагонали делятся пополам в точке пересечения K – середина FE $\Rightarrow$
MN проходит через K

ч.т.д.