ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101953418272

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ЧУПРИНА

Имя ЯНА

Отчество СТАНИСЛАВОВНА

Дата рождения 15 03 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 339

Телефон 89221183410

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101953418272

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01 Количество черновиков к проверке

Время выхода с 13:10 до 13:15

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	20	–					
Балл члена жюри №2	20	20	0	20	–					

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1.

Пусть ~~?~~ можно расставить числа от 1 до 36 таким образом.

Посчитаем сумму всех чисел в таблице:

$$1+2+3+4+\ldots+36=\frac{(1+36)\cdot 36}{2}=37\cdot 18=666$$

Заметим, что сумма 6 сумм по горизонтали и 6 сумм по вертикали равно удвоенной сумме всех чисел.

Т.е. $S=2\cdot 666=1332$, где S – сумма 6 сумм по горизонтали и 6 сумм по вертикали.

~~Пусть~~ Т.к. 6 сумм по вертикали и 6 сумм по горизонтали в некотором порядке представляют 12 последовательных чисел, то их сумма будет вида: $12k+\cancel{78}\,66$, поскольку эти числа вида: $k, k+1, k+2, \ldots, k+11$, и их сумма равна $12k+(1+2+3+4+\ldots+11)=$

$$=12k+\frac{12\cdot 11}{2}=12k+66$$

Тогда заметим, что $12k+66=S=1332$, т.к. это и есть сумма 6 сумм по горизонтали и 6 сумм по вертикали

$12k=1332-66$

$12k=1266$

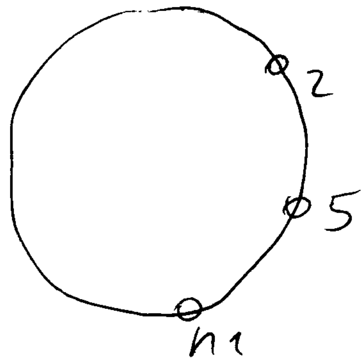
$k=105{,}5$ – не ~~целое~~ ~~число~~ ~~натуральное~~ целое число

Противоречие, т.к. последовательные числа ~~могут~~ должны быть целыми

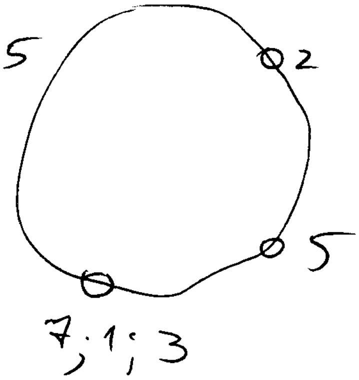
Значит нельзя искомым образом расставить в квадрате числа от 1 до 36. Ответ: нет, нельзя

Задание 3.

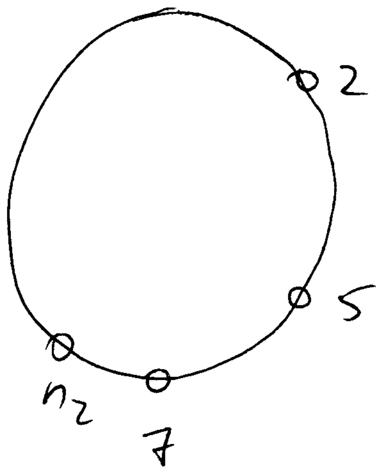
Постепенно будем расставлять по кругу числа и смотреть на все возможные варианты. Начнём с 2 и 5 стоящих рядом.



Следующее число n1 должно быть такое, что ~~...~~ $5 \vdots |n_1-2|$, т.е. $|n_1-2| = 1$ или 5 и $n_1<8$

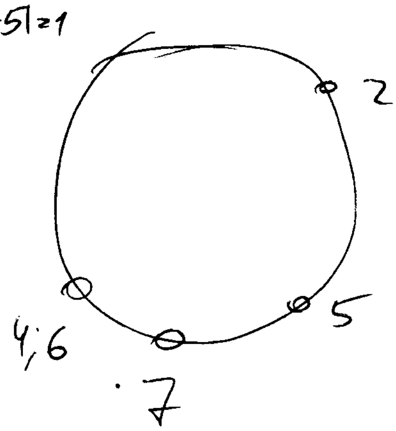


1)

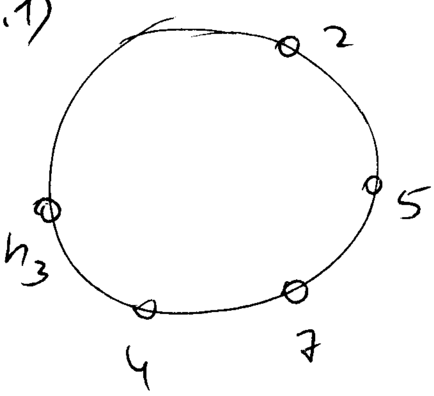


$n_2<8$,

$7 \vdots |n_2-5|$. $n_2-5 \neq 7$, т.к. $n<8$. Тогда $|n_2-5|=1$



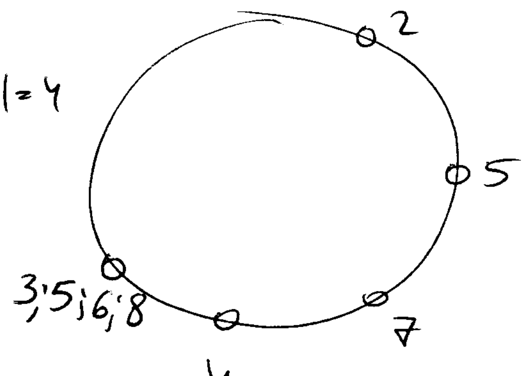
1.1)



$n_3<8$,

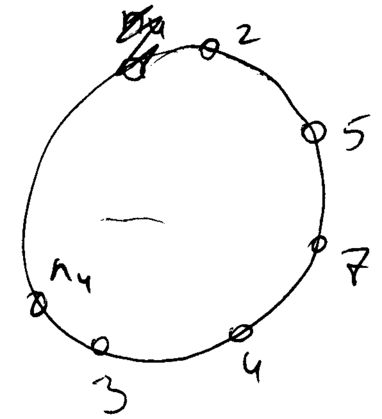
$4 \vdots |n_3-7|$, тогда $|n_3-7|=1$ или $|n_3-7|=2$ или $|n_3-7|=4$

~~Поскольку $n_3<8$,~~ ~~то~~

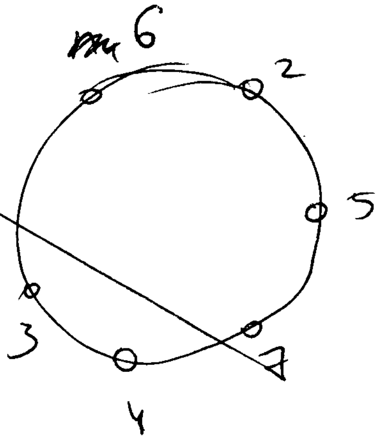


Аналогично другим пунктам $n_3 \neq 5$, т.к. 5 уже присутствует на круге

Пусть $n_3 = 3$



~~$n_4<8$~~
~~$2 \vdots |n_4-5|$, тогда~~
~~$|n_4-5|=2$ или~~
~~$|n_4-5|=1$~~

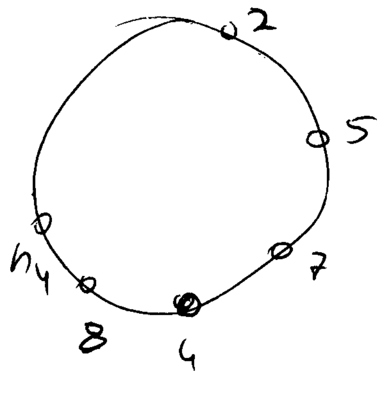


Заметим, что т.к. $3 \vdots |n_4-4|$, то $|n_4-4|=1$ или $|n_4-4|=3$, откуда $n_4=5$ или $n_4=3$ или $n_4=7$ или $n_4=1$.
Отсюда $n_4=1$

Тогда число, стоящее рядом с n_4 должно быть равно 2 или 4. Противоречие, эти числа уже есть

При $n_3=6$ числа 4 или 6 стоят рядом. ~~Если вокруг~~

При $n_3=8$:

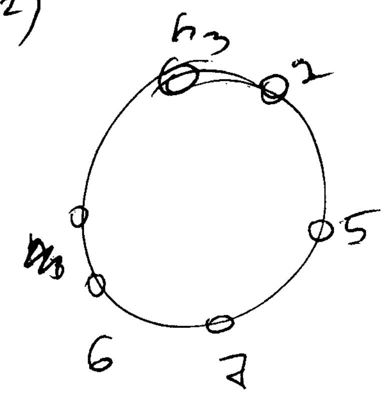


$8 \vdots |n_4-4|$, откуда $|n_4-4|=1$, $|n_4-4|=2$ или $|n_4-4|=4$, тогда $n_4=3$ или $n_4=6$

При $n_4=3$ следующее число должно быть равно 2, 5 или 7, но все эти числа уже есть на круге.

При $n_4=6$ следующее число должно быть равно 2, 5, 6 или 7, но все эти числа уже есть на круге. Противоречие

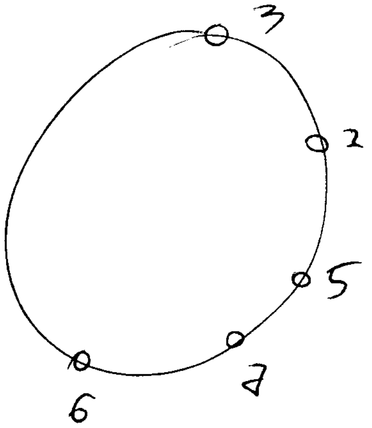
1.2)



~~$6 \vdots |n_3 - 7|$, тогда $n_3 = 1$ или $n_3 = 8$ или $n_3 = 4$ или $n_3 = 5$~~

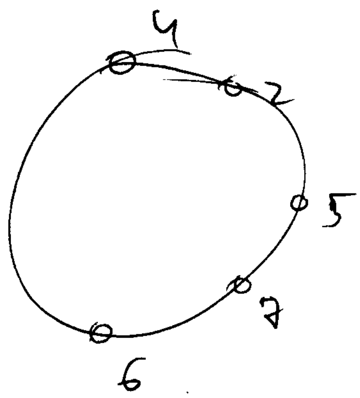
Заметим, что $n_3 = 3$ или $n_3 = 4$ ~~или n_3~~

Пусть $n_3 = 3$



Тогда осталось расставить числа 1, 4, 8. Поскольку рядом с 1 должны стоять два последовательных числа ~~получим~~ (*) ~~противоречие~~, т.к. 1 делится только на 1, но есть их разность равна 1, получаем противоречие

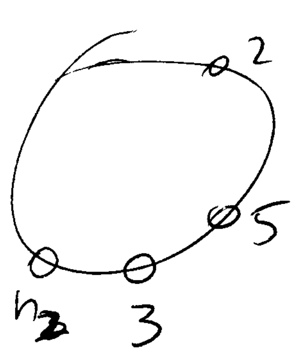
Пусть $n_3 = 4$



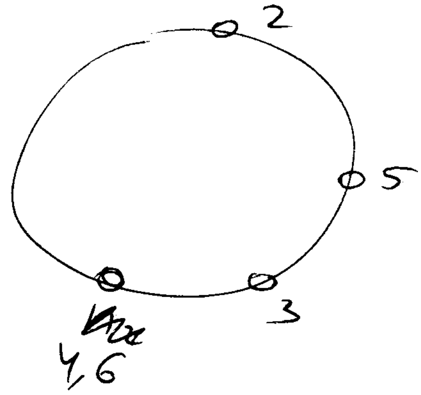
Тогда осталось расставить числа 1, 3, 8. ~~Поско~~ По (*) получаем противоречие

~~n_3~~ ~~$n_3 = 8$~~

2)



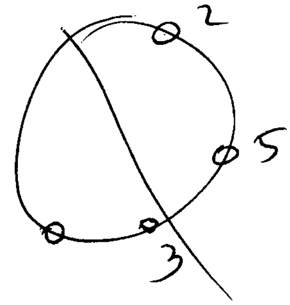
$n_2 = 4$ или $n_2 = 6$ или 8

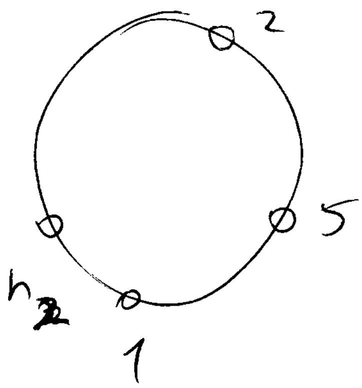


Пусть $n_2=4$, тогда следующее число должно быть равно 1. ~~Однако~~ Поскольку 5 и 3 уже на круге, по ⊛ получаем противоречие

Пусть $n_2=6$. Тогда следующее число обязательно равно 4. Тогда 4 и 6 – стоят рядом

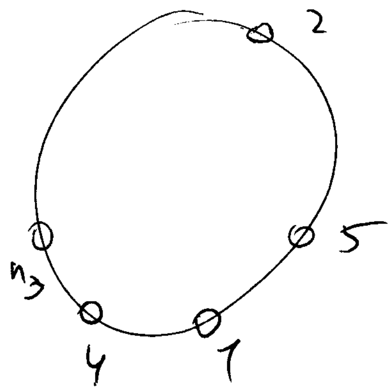
3)





По ⊛ $n_2=4$ или $n_2=6$

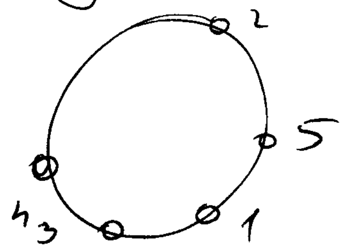
Пусть $n_2=4$



Тогда $n_3=5$ или $n_3=3$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Число 5 уже на круге, значит $n_3=3$. Тогда следующее число n_4 точно равно 7, т.к. $3 \vdots |n_4-4|$

т.к. $7 \vdots |n_5-3|$, то $n_5=2$ или $n_5=4$. Противоречие, т.к. ~~эти~~ числа уже на круге

Пусть $n_2=6$



Тогда $n_3=7$ или $n_3=3$ или $n_3=4$

При $n_3=4$ 4 и 6 стоят рядом

При $n_3=3$, следующее число равно 7, следующее за ним обязательно равно 4. последнее число равно 8, но тогда

2: 18-51. противоречие

При $n_3=7$ следующее число равно 5, но это число уже есть на круге. Противоречие

Разобрав все случаи исходной расстановки мы получили, что они либо приводят к противоречию, либо в них 4 и 6 стоят рядом. Тогда, ~~исходная расстановка сделана так по одному из случаев то и~~ 4 и 6 точно стоят рядом в исходной расстановке, т.к. один из случаев точно должен подходить. перебор неполный

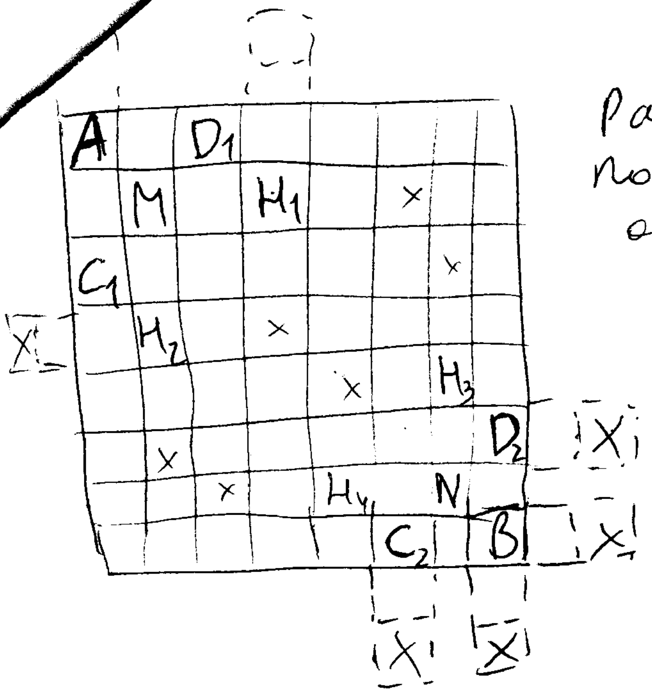
Задание 4.

~~Заметим~~ Раскрасим исходную доску шахматной раскраской. Заметим, что оборотень, стоящий на ~~клетке~~ чёрной ~~белой~~ клетке может ~~убить только оборотней~~ бить только чёрные клетки. Аналогично с белыми.

т.е. оборотень может бить ~~5 клет~~ только клетки ~~их цвета~~, на такого же цвета как та, на которой стоит оборотень

Тогда будем рассматривать чёрные и белые клетки отдельно. ~~Заметим, что белые клетки повторяют чёрные, но~~ Поскольку максимум оборотень бьёт 5 клеток, то т.к. чёрных клеток 32, нужно минимум 7 оборотней. Тогда они будут бить 35 клеток.

доп. лист № 1



Рассмотрим клетку А ~~и В~~. Поскольку ~~их~~ её должны бить оборотни, то оборотни должны стоять либо на позиции C_1, D_1 или A. При стоянии на C_1 или D_1 теряется одна возможная побитая клетка. При стоянии на А — две. Аналогично с клеткой В и позициями C_2, D_2.

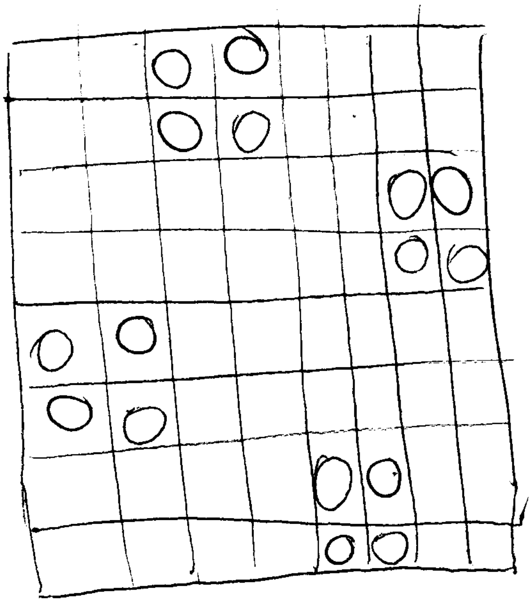
Тогда, т.к. клетки А и В должны быть побиты, в любом случае суммарное кол-во побитых клеток $S \leq 33$

Рассмотрим клетки N и M. Их можно побить с позиций H_4, H_3, N и H_1, H_2, M соответственно. Стоя в каждой из позиций мы теряем как минимум одну возможную побитую клетку. Тогда $S \leq 31$

Всего чёрных клеток 32, а $S \leq 31$. Противоречие, тогда нужно минимум 8 оборотней на чёрные клетки.

Аналогичные рассуждения и для белых клеток, тоже рассматриваются угловые клетки и идущие за ними ~~по~~ по диагонали клетки. Получим, что для белых и чёрных нужно ≥ 16 оборотней. Тогда 16 оборотней — наименьшее количество

Пример на 16 оборотней:



Ответ: 16.

Задание 2.

$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$$

$$\cancel{a\sqrt{(a^2+c^2+2abc)(a^2+b^2+2abc)} + b\sqrt{(a^2+b^2+2abc)(b^2+c^2+2abc)} \geq 2\sqrt{abc}}$$

$$\begin{cases} a\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2} + b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2} + c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2} \geq 2\sqrt{abc} \\ a^2+b^2+c^2+2abc = 1 \end{cases}$$

$$a(a+bc) + b(b+ac) + c(c+ab) \geq 2\sqrt{abc}$$

$$a^2+abc+b^2+abc+c^2+abc \geq 2\sqrt{abc}$$

$$1 + abc \geq 2\sqrt{abc}$$

$$1+abc-2\sqrt{abc} \geq 0$$

$$(1-\sqrt{abc})^2 \geq 0$$