ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101137892724

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия КОТЛЕЧКОВ

Имя ЕГОР

Отчество ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 11 05 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79655432173

Дата 05 02 2024 **Подпись** Егор

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101137892724

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	00	05	23						
Балл члена жюри №2	25	00	05	23						

Итоговый балл

Подпись члена жюри №1 Ши

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

Пусть число в n-ной столбце в m-ной строке — $a_{n,m}$.

$a_{1,1}$	$a_{2;1}$	
$a_{1;2}$		

и т.д.

$a_{1;2k}+a_{2;2k}=64$

1) Докажем, что $a_{1;1}+a_{2;1}+a_{1;2k}$ ~~$+a_{k+1;2k}$~~ $=64$.

Б.И. $a_{1,1}+a_{2;1}+a_{2;2}+a_{1;2}=64$ по условию

Ш.И. Пусть $a_{1,1}+a_{2,1}+a_{1;2k}+a_{2;2k}=64$.

Тогда $a_{1;2k}+a_{2;2k}+a_{1;2k+1}+a_{2;2k+1}=64$ по условию.

$a_{1;2k+1}+a_{2;2k+1}+a_{1;2k+2}+a_{2;2k+2}=64$

$\Rightarrow a_{1;2k}+a_{2;2k}=a_{1;2k+2}+a_{2;2k+2}$

$\Rightarrow$ По м.индукции $a_{1;1}+a_{2;1}+a_{1;2k+2}+a_{2;2k+2}=64$.

для a_{n}; Для остальных столбцов и строк аналогично

2) Докажем, что $a_{1,1}+a_{1;2k}+a_{2n;1}+a_{2n;2k}=64$.

Б.И. $a_{1;1}+a_{2;1}+a_{1;2k}+a_{2;2k}=64$.

Ш.И. $a_{1,1}+a_{2n;1}+a_{2n;2k}+a_{1;2k}=64$.

$\Rightarrow$ ~~Тогда $a_{2;1}+a_{2n;2}+a_{2n;2k}+a_{3;1}+a_{2n+1;1}$~~

~~$a_{1,1}+a_{2n;1}+a_{2n+1;1}+a_{2n;2k}+a_{2n+1;2k}=64$~~

~~$a_{1,1}+a_{1;2k}+a_{2n;1}+a_{2n;1}$~~

$\Rightarrow a_{2n;1}+a_{2n+1;1}+a_{2n;2k}+a_{2n+1;2k}=64$

$\Rightarrow a_{1,1}+a_{1;2k}=a_{2n+1;1}+a_{2n+1;2k}$

$\Rightarrow a_{1,1}+a_{2n+2,1}+a_{2n+2;2k}+a_{1;2k}=64$. Продолжение на след. странице

№1.

~~Для~~ Для остальным ~~квадратов~~ прямоугольников аналогично

=) Если у квадрата четное количество клеток в высоте и ширине, то сумма чисел в вершинах = 64.

$$=)\ \text{ответ} = \underbrace{\frac{512}{2}}_{\text{столбцы}} \cdot 64 + \underbrace{\frac{2048}{2}}_{\text{строки}} \cdot 64 - \underbrace{64}_{\text{угловые}} = 2^{14} + 2^{16} - 2^{6} =$$

$$= 16384 + \cancel{61136}\ 65536 - 64 = \cancel{83856}\ 81856$$

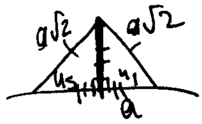
⊕ 25б

Ответ: ~~83856~~ 81856

№2.

Пусть высоты ~~тр~~ гор $= x$ и y. тогда протяжённость $= 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y$.

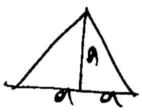
Площадь $= x^2 + y^2$



по т. Пифагора

$2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 4096$ − постоянно.

$=)\ x + y = \frac{4096}{2\sqrt{2}}$ − постоянно



$S = \frac{1}{2}a \cdot 2a = a^2$.

$x^2 + y^2$ − минимально.

Пусть б.о.о. $x < y$; $x + k \le y - k$; $k > 0$.

$(x+k) + (y-k)$ − сумма та же

$(x+k)^2 + (y-k)^2 = x^2 + y^2 + 2xk - 2yk + 2k^2 \overset{?}{=} x^2 + y^2 \quad | -x^2 - y^2$

$2xk - 2yk + 2k^2 \overset{?}{=} 0 \quad |:2$

$xk - yk + k^2 \overset{?}{=} 0 \quad |:k\ (k \neq 0)$

$x - y + k \overset{?}{=} 0$

По условию

$x + k \le y - k =)\ x + k < y \quad (k > 0$

$=)\ x - y + k < 0 =)$ площадь уменьшилась

=) если они (x и y) не равны, их можно сблизить, и площадь уменьшится.

$=)$ min площадь, $x = y$; $2x = \frac{4096}{2\sqrt{2}} =)\ x = \frac{1024}{\sqrt{2}} = \frac{2^{10}}{\sqrt{2}}$

$2x^2 = \frac{2 \cdot 2^{20}}{2} = 2^{20} = 16777216$

Ответ: $2^{20} = 16777216$

⊖ 0б

Бланк ответов ~~пара (a,b) = пара (b,a)~~ т.к ~~пара (a,b) ≠ пара (b,a)~~

№23

Нужно разбить 18 фишек на 24 лунки - Пусть есть 23 перегородки, и то ~~так~~ количество между 2 перегородками (или с краю) = количество в ~~луче~~ лунке

=> ответ $C_{41}^{18} = \frac{41!}{18!\,23!}$ А почему! (−) 5б

№4. В решении пара (a,b) = пара (b,a), т.к в условии не сказано.

т.к. $(a,b)=1$ и $ab=1$ => $\forall n:(X \vdots n)$ ($a \vdots n$ и $(n;b)=1$) или ($b \vdots n$ и $(n;a)=1$)

Если (a,b) ≠ (b,a), то аналогично, красота каждого числа вдвое больше.

=> если разложить X на $p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_3^{a_3}\cdot p_n^{n}$, где p_i - простое число,

a = произведение $p_i^{a_i}$, b = произведение $p_l^{a_i}$ => кол-во пар $=2^{c-1}$, где c - это количество p в X, т.к 2^c вариантов - берём или не берём в a, $:2$, т.к ка, т.к повторная пара посчитается дважды, $(a,b)=(b,a)$

=> 2^{c-1} вариантов

$101 \not\vdots x;\ x \in \{2;3;5;7\}$ => 101 - простое ($11^2>101$)

=> ~~красота 101~~ $2^{1-1}=2^0=1$

Если (a,b) ~~=(a,b)~~ =(b,a) - то красота ~~$2^{1-1}=2^0=1$~~

ответ: красота = 1 (+) 4б

Если (a,b) ≠ (b,a) - ответ: 2 (±)

$p_1\cdot p_2\cdots p_n \le p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$, а красота так же => 1б

с красотой 2^n минимальное число - $p_1 p_2 \cdots p_n$, где p_i - i-ое по возрастанию простое число.

А почему!

=> при красоте 2^{5-1} минимальное число - $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310$

$2310 > 1024$ => красота < 2^{5-1}

=> Если (a,b) = (b,a) ответ: красота $2^3 = 8$, у числа 210, $210=2\cdot3\cdot5\cdot7$

Если (a,b) ≠ (b,a) ответ: $2^4 = 16$, у числа 210

Бланк ответов