ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101654417227

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ЧУНИХИНА

Имя ВАЛЕРИЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 30 05 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 338

Телефон 89827683993

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101654417227

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	5	0					
Балл члена жюри №2	20	20	0	5	0					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1.

1) Заметим, что $\sum$ чисел от 1 до 36 $= \frac{1+36}{2} \cdot 36 =$

$= 37 \cdot 18 = 666$, значит $\sum$ 6-ти сумм по горизонтали $=$ $= 666$.

Также $\sum$ 6-ти сумм по вертикали $= 666$.

2) Из рассуждений в п.1. получается, что $\sum$ 12-ти последовательных чисел $= 666 \cdot 2$. +

Запишем 12 последовательных чисел как:

$a_1, a_1+1, a_1+2 \ldots, a_1+11 \Rightarrow$

$S_{12} = \frac{a_1+(a_1+11)}{2} \cdot 12 = 666 \cdot 2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{12}$

$\frac{2a_1+11}{2} = 111 \Leftrightarrow 2a_1+11 = 222 \Leftrightarrow 2a_1 = 211. \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 105{,}5$ — приходим к противоречию, т.к.

$\sum$ 6-ти натуральных чисел не может быть действительным числом.

Ответ: нет, нельзя. +

Задание 2. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Док-ать: $a\underbrace{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}_{(1)} + b\underbrace{\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}}_{(2)} + c\underbrace{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}_{(3)} \geq 2\sqrt{abc}$ (☆).

(1): раскроем скобки: $(1-c^2-b^2)+b^2c^2 = a^2+2abc+b^2c^2 = (a+bc)^2$

аналогично (2): $(1-c^2)(1-a^2) = (1-a^2-c^2)+a^2c^2 = b^2+2abc+a^2c^2 =$

$= (b+ac)^2$

и (3): $(1-a^2)(1-b^2) = (1-b^2-a^2)+a^2b^2 = (c^2+2abc+a^2b^2) = (c+ab)^2$.

Следовательно, исходное нер-во (☆) имеет вид:

продолжение задачи 2.

(*): $a\sqrt{(a+bc)^2}+b\sqrt{(b+ac)^2}+c\sqrt{(c+ab)^2}\geq 2\sqrt{abc}$

т.к. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, то $|a+bc|$ можем раскрыть со знаком (+)

$|b+ac|$

$|c+ab|$.

Получаем нер-во:

(*) $a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)\geq 2\sqrt{abc}\iff$

$\iff a^2+abc+b^2+abc+c^2+abc\geq 2\sqrt{abc}\iff$

$\underbrace{a^2+b^2+c^2+2abc}_{=1}+abc\geq 2\sqrt{abc}\Rightarrow$

Нер-во имеет вид: $1+abc\geq 2\sqrt{abc}\iff$

$\iff abc-2\sqrt{abc}+1\geq 0\iff$

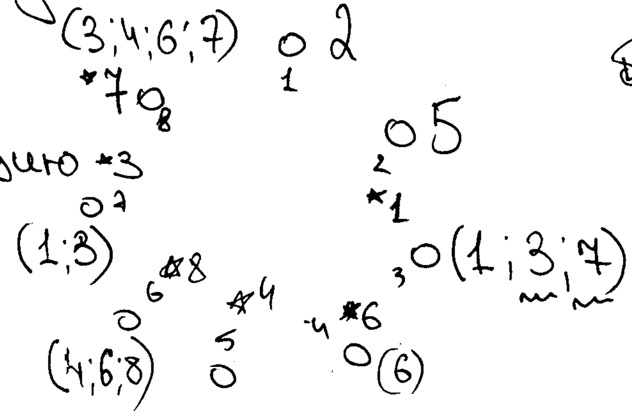
$\iff(\sqrt{abc})^2-2\sqrt{abc}+1^2\geq 0\iff$

$\iff(\sqrt{abc}-1)^2\geq 0$ – верно, т.к. квадрат числа всегда ≥ 0.

ч.т.д. ■

Задание 3. Докажем от противного, пусть 4 и 6 не стоят рядом.

( ) – в скобках будем обозначать возможные числа на позиции.



1) поставим на 8-ую позицию 7.

2) далее на 7-ую позицию 3.

3) получается, что на 3-ю позицию мы теперь можем поставить только 1.

4) из этого вытекает, что на 4-ую позицию ставится 6.

продолжение задачи 3.

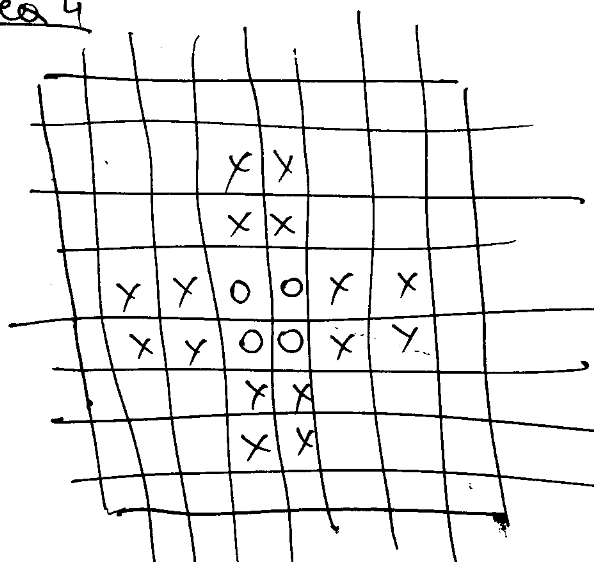
5) осталось расположить цифры 4 и 8, так, чтобы усл-ие круга выполнилось. Если мы поставим 4 на 6-ую позицию, а 8 на 5-ую, то усл-ие делимости числа на разность соседей выполняется не будет. $(8-1 \nmid 8)$.

=> 4 будет стоять на 5-ой позиции, а 8 на 6-ой.

=> Чтобы усл-ие выполнилось 4 должна стоять рядом с 8. Рассмотрен частный случай, а не док-во от противного.

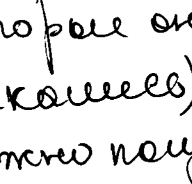
• Если бы мы изначально на 1 пункте выбирали бы другую цифру, задача бы свелась к тому же, ~~что~~ что 8 и 4 определяются однозначно. Не доказано

задача 4



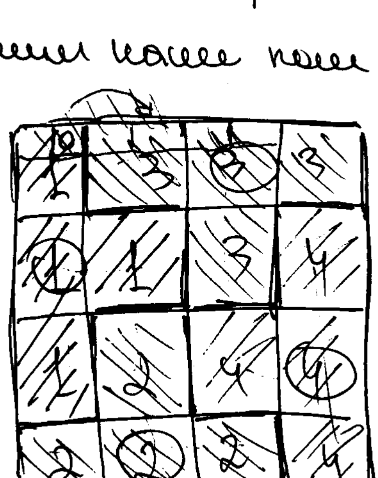
1) заметим, что комбинацию, ~~из~~ которая покрывает максимальную площадь поля без пробелов можно составить из 4-ёх фигур. (так, что клетки, которые они бьют, не пересекаются).

2) такую фигуру можно получить из 4ёх квадратов в



(*)

3) разделим наше поле на квадраты 2×2.



получается, что минимальное кол-во фигур/или части фигуры (*) можно вместить 4 шт., так, чтобы поле было полностью покрыто. как они расположены изображено на рисунке

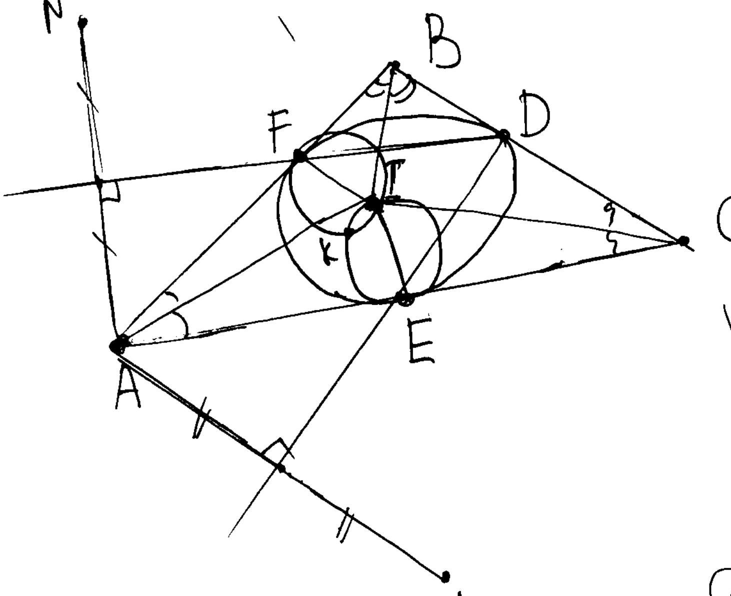
продолжение задачи 4.

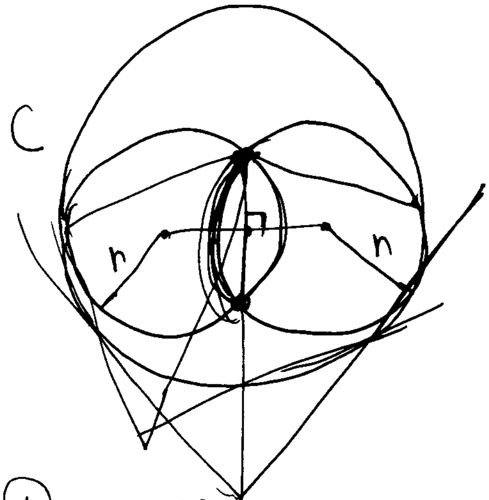
Центры 4-ёх фигур (A) обведены в кружок. Получается, что всего фигур оборотней будет $4 \cdot 4 = 16 \rightarrow$ и это минимальное кол-во, т.к. такое разбиение гарантирует что клетки, кот.-ые бьёт каждая фигура не пересекаются.

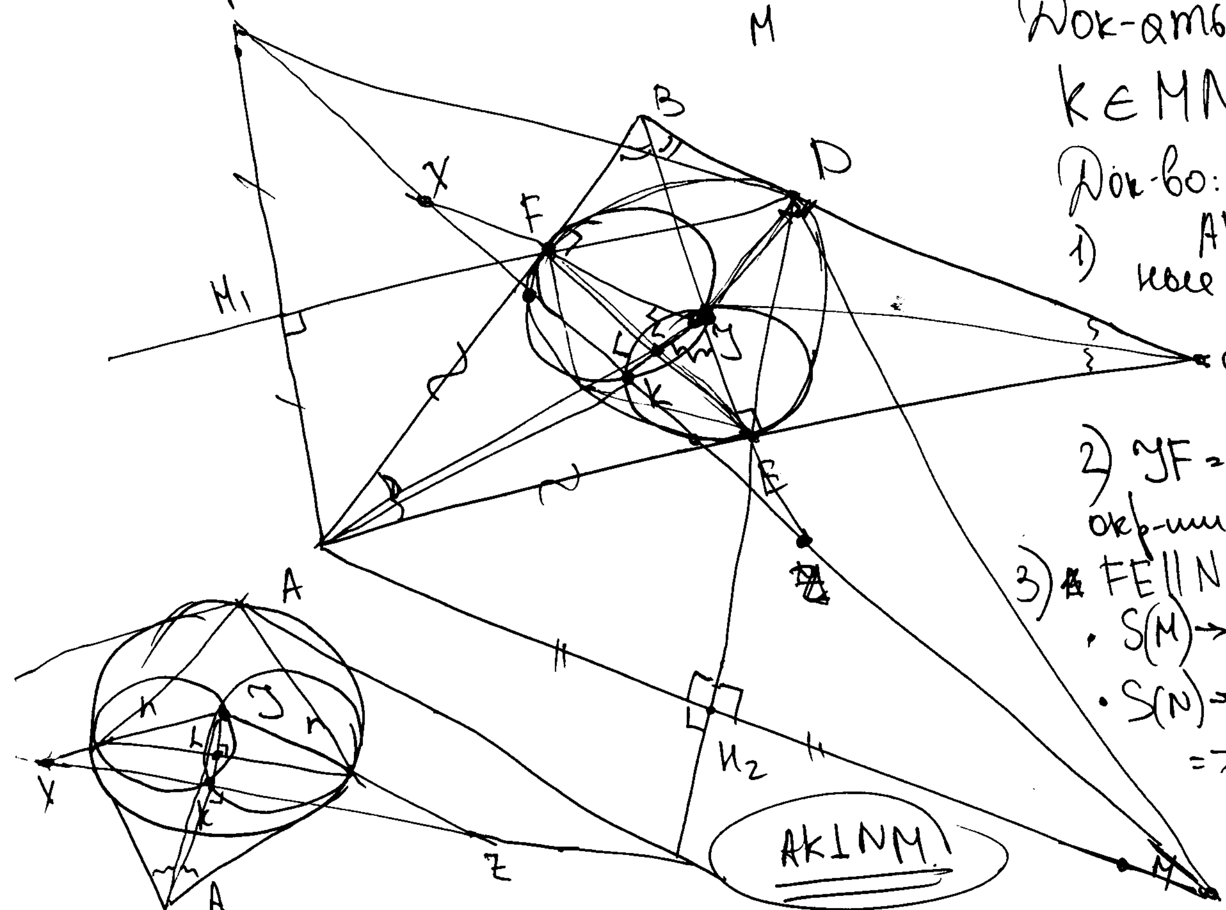
Ответ: 16

Почему это условие влечёт минимальность? Не доказано

Задача 5.







Док-ать, что $K \in MN$

Док-во:

1) $AF = AE$ - касательные к окр-ти из одного угла. +

2) $JF = JE$ - как радиусы окр-ти (J).

3) $FE \parallel NM$, т.к.

• $S(M) \rightarrow A$ относ. DE.

• $S(N) \rightarrow A$ относ. DF

$\Rightarrow \triangle ZXJ \sim \triangle NDM$.

4 р16.

это не так

4) Если рассмотривать гомотетию из т. Y на прямые FE и XZ, то $\frac{YE}{EZ} = \frac{YL}{Lk} = \frac{YF}{FX}$, где Yk – $\perp$ к FE и XZ.

т. $L = Yk \cap FE$.

т.к. $\triangle YFE \sim \triangle YkX$, то $\cancel{\frac{Y}{}}$ рав-во будет вып-ся.

$\Rightarrow$ т. $k \in XZ$

чтд. ■

продвижений нет