ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101205949958

Титульный лист

Направление	☒ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия ГАБДРАХИМОВ

Имя ЛЕНАР

Отчество ИЛЬДАРОВИЧ

Дата рождения 05 01 2008

Город участия УФА

Аудитория 9-101

Телефон 89869773318

Дата 05 02 2024 Подпись Габ

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101205949958

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ■ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 1 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	03	25	25						
Балл члена жюри №2	00	03	25	25						

Итоговый балл 053

Подпись члена жюри №1 [подпись]

Подпись члена жюри №2 [подпись]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 4.

1) Простопосчитаем значение функции:

$gcd(1,8)+gcd(2,9)+gcd(3,10)+gcd(4,11)+gcd(5,12)+gcd(6,13)+gcd(7,14)=1+1+1+1+1+1+7=13$

Ответ: 13 +

2) Докажем следующий факт:

Пусть $d=gcd(i,i+K) \Rightarrow i \vdots d$ и $i+K \vdots d$

Док-ем, что $K \vdots d$.

Пойдём от противного, пусть $K \not\vdots d$.

~~Тогда~~ Рассмотрим i и $(i+K)$ по модулю d:

Это тоже самое, что ~~и 0 и 0+K, но 0+K=0 mod~~ и 0 и $0+K \bmod d$, но $0+K \bmod d=0 \Rightarrow K \bmod d=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow K \vdots d$, зн-т предположение неверное. (mod-операция ~~т.п.д.~~ взятия по остатку)

Тогда $gcd(i,i+K)$ - делитель K.

Рассмотрим все делители 1024, т.к. $1024=2^{10}$, то делители равны: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

Заметим, что больший делитель делится на меньший.

Разберём случаи, когда $gcd(i,i+1024)=1024$.

Таких случаев $\frac{1024}{1024}=1$

~~сл~~ Случаи, когда $gcd(i,i+1024)=512$

~~Т~~Таких случаев $\frac{1024}{512}-1$ (т.к. $1024:512$, то случай, когда $i=1024$ нужно отбросить) $= \cancel{2}\ 1$

Когда $gcd=256$

случаев $\frac{1024}{256}-1-1=2$

Когда $gcd=128$: $\frac{1024}{128}-1-1-2=4$

~~Кор~~Когда $gcd=64$: $\frac{102\cancel{8}4}{64}-1-1-2-4=8$

Когда $gcd=32$: $\frac{102\cancel{8}4}{32}-1-1-2-4-8=16$

Заметим, что это степени двойки, и зн-т оставшиеся значения равны:

32, 64, 128, 256, 512

258

~~Зно~~ Зн-т $F(1024,1024)=1024\cdot1+512\cdot1+256\cdot2+128\cdot4+$
$+64\cdot8+32\cdot16+\cancel{64\cdot32+128\cdot64}\ 16\cdot32+8\cdot64+4\cdot128+2\cdot256+1\cdot512=$
$=1024+2\cdot(512\cdot1+256\cdot2+128\cdot4+64\cdot8+32\cdot16)=1024+2\cdot(512+$
$512+512+512+512)=1024+\cancel{2}\,1024\cdot5=1024\cdot6=6144$

Ответ: 6144

+

Задание 3.

Заметим, что в получившемся графе обязательно все вершины будут ~~в~~ в каком-либо цикле.

~~Док~~ Док-во:

Пойдём от противного, пусть есть ~~какой-то набор~~ ~~чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots a_x$~~, которые хотя бы одно число a_1, которое не лежит на цикле.

Из a_1 ~~в~~ должно выходить ребро a_2, из ~~а~~ a_2 в a_3 и т.д. Заметим, что из-за того что из любой вершины выходит ребро, то ~~рано~~ из ~~вершины а~~ последней вершины в этой цепочке должно идти ребро в предыдущие вершины, иначе это не последняя вершина в цепочке.

Теперь докажем, что это ребро ведёт в a_1.

Если это не так, то это ребро ведёт в вершину a_y, но в неё уже шло ребро (ведь это не первая вершина) $\Rightarrow$ ~~что~~ что число a_y стоит на двух позициях, что невозможно.

Зн-т ребро ведёт в вершину $a_1 \Rightarrow a_1$ лежит на цикле

Противоречие

ч.т.д.

~~Если все вершины в любой перестановке лежат на циклах $\Rightarrow$ $\Rightarrow g(p) = 2^{n+1} - 1$, т.к. все будут все степени двойки от 1 до n и мы возьмём их xor, т.е. если кол-во перестановок чётно, то xor всех g равен 0, всего а кол-во перестановок равно n!, а при n! > n > 1 оно чётно $\Rightarrow$ при n=1 ответ: при n=1, зн-е равно 2, иначе 0~~

~~Ответ: если n=1, 2, иначе 0.~~

3

Бланк ответов

дополнительный лист 1

Теперь, из-за того что независимо от перестановки любая вершина лежит на цикле, то её степень двойки войдёт в $g(p)$, т.е. $g(p)$ - будет равно $2^n \operatorname{xor} 2^{n-1} \operatorname{xor} \ldots \operatorname{xor} 2^1 = 2^{n+1}-2$, ведь сумма двух ~~степене~~ разных степеней ~~3н-т~~ двоек равна их xor.

3н-т все $g(p)$, равны а xor равных чисел равен либо 0, если чисел чётно, и самому числу иначе.

А т.к. перестановок $n!$, а при $n>1$, это значение чётно, то ~~сумм~~ xor всех $g(p)$ ~~=+~~ равно 0, если $n>1$.

Если $n=1$, то ~~д~~ существует единственная перестановка: $1 \to 1$. Граф будет таким:

+25б

~~цикл~~ единственный цикл с вершиной $1 \Rightarrow$ ~~$g(1)$~~

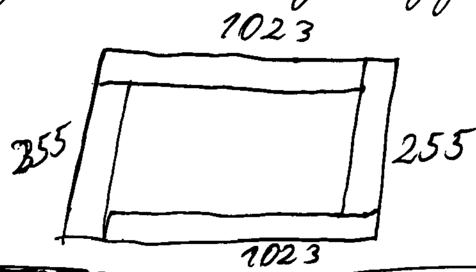
$g(1) = 2^1$

Ответ: если $n=1$, то 2, а иначе 0.

+3б

~~За~~ задание 3.2.

1) Разделим таблицу следующим образом:



Сумма в этих секторах равна:

$\frac{1023}{3}\cdot 32\cdot 2+\frac{255}{3}\cdot 32\cdot 2 = 27264$

Ответ: 27264