ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101461882954

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия ИВЧЕНКО

Имя АНДРЕЙ

Отчество ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 16 06 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория ГУК404

Телефон +79030793530

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101461882954

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	03	25	25						
Балл члена жюри №2	00	03	25	25						

Итоговый балл 053

Подпись члена жюри №1 [signature]

Подпись члена жюри №2 [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Вариант 1. Бланк ответов

Задание 4. $F(n,k) = \sum_{i=1}^{n} \gcd(i, i+k) = \sum_{i=1}^{n} \gcd(i,k)$ – по алг. Евклида.

1) $F(7,7) = \gcd(1,7)+\gcd(2,7)+\gcd(3,7)+\gcd(4,7)+\gcd(5,7)+\gcd(6,7)+\gcd(7,7) =$
$= 1+1+1+1+1+1+7 = 6+7 = 13.$ Ответ: 13. + 1 б

2) $1024 = 2^{10}$. Пусть $i = 2^k \cdot t$, $0 \le k \le 10$, t – нечёт., $i \le 2^{10}$.

Тогда $\gcd(i, 2^{10}) = \gcd(2^k \cdot t, 2^{10}) = 2^k$

Пусть $D(k)$ – кол-во чисел i, где $1 \le i \le 2^{10}$, т.ч. $i \,\vdots\, 2^k$.

Тогда очевидно, что $F(1024, 1024) = F(2^{10}, 2^{10}) = \sum_{i=1}^{2^{10}} \gcd(i, 2^{10}) =$

$= 2^0 \cdot \underbrace{(D(0) - D(1))}_{\text{дел. на } 2^0 \text{, но не дел. на } 2^1} + 2^1 \underbrace{(D(1) - D(2))}_{\text{дел. на } 2^1 \text{, но не дел. на } 2^2} + 2^2 \underbrace{(D(2) - D(3))}_{\text{дел. на } 2^2 \text{, но не дел. на } 2^3} + \ldots + 2^{10} \underbrace{(D(10) - D(11))}_{\text{дел. на } 2^{10} \text{, но не дел. на } 2^{11}},$

т.к. среди слагаемых 2^0 встретится $D(0) - D(1)$ раз, 2^1 встретится $D(1) - D(2)$ раз и т.д. (по формуле включений – исключений)

Тогда $F(1024, 1024) = D(0) \cdot 2^0 + D(1) \cdot (2^1 - 2^0) + D(2) \cdot (2^2 - 2^1) + \ldots + D(10) \cdot (2^{10} - 2^9) -$
$- 2^{10} \cdot D(11) = D(0) - \cancel{2^{10} \cdot D(11)}^{D(11)=0} + D(1) \cdot 2^0 + D(2) \cdot 2^1 + D(3) \cdot 2^2 + \ldots + D(10) \cdot 2^9.$

Вычислим $D(k)$.

~~…~~ на 2^k дел. числа $1 \cdot 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 4 \cdot 2^k, \ldots, y \cdot 2^k$, где $y \cdot 2^k \le 2^{10}$,
$y \to max$. $y \le 2^{10-k} \Rightarrow y = 2^{10-k}$. В ряду y чисел $\Rightarrow D(k) = 2^{10-k}$, если $k \le 10$ $\Rightarrow$

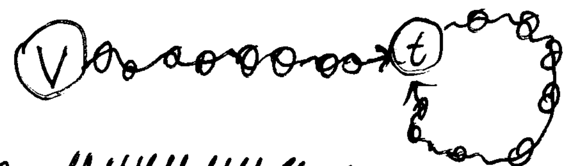
$\Rightarrow F(2^{10}, 2^{10}) = 2^{10} - 2^{10} \cdot 0 + \underbrace{2^{10-1} \cdot 2^0}_{2^9} + \underbrace{2^{10-2} \cdot 2^1}_{2^9} + \underbrace{2^{10-3} \cdot 2^2}_{2^9} + \ldots + \underbrace{2^{10-10} \cdot 2^9}_{2^9} =$

$= 2^{10} + 10 \cdot 2^9 = 1024 + 5120 = 6144$

Ответ: 6144. + 24 б

Задание 3. Вариант 1.

Пусть имеется перестановка P, и также построен граф G, соответствующий P.
Заметим, что у каждой вершины в G ровно 1 входящее и 1 исходящее ребро. Предположим, что вершина V не лежит ни на одном цикле. Будем идти по исходящим рёбрам, пока не придём в вершину t, где уже были (такой момент всегда будет, т.к. вершин конечное количество). $V \neq t$, т.к. V не леж. на цикле, а t лежит.



Во время обхода мы вошли в t как минимум из 2 разных вершин, т.к. предпоследняя вершина в обходе не лежала на пути из V в t (либо это была сама t, если в графе петля t). Но в каждую вершину входит ровно 1 ребро => противоречие.
Тогда все вершины графа лежат на каком-то цикле (и ровно одном, т.к. у вершин 1 вход. и 1 исх. ребро, т.е. следующая вершина однозначно задана).

Тогда $\bigcup\limits_{X \in C(P)} X$ — это множество всех вершин графа.

$S(X) = \sum\limits_{x \in X} 2^x = xor_{x \in X} 2^x$. Пусть V — мн-во вершин графа.

$g(P) = xor_{X \in C(P)} \left(xor_{x \in X} (2^x) \right) = xor_{v \in V} 2^v = xor_{x \in P} 2^x =$

~~Ответ не зависит g(P) не зависит от порядка~~

$= \sum\limits_{x=1}^{n} 2^x = 2 \cdot \left(\sum\limits_{x=0}^{n-1} 2^x \right) = 2 \cdot (2^n - 1)$. $g(P)$ не зависит от порядка чисел в перестановке

Вариант 1.

Задание 3 (продолжение).

Ответ на задачу – это xor $g(P)$ по всем P = xor $2(2^n-1)$ по всем P $= \underbrace{2(2^n-1) \text{ xor } 2(2^n-1) \text{ xor} \ldots \text{xor } 2\cdot(2^n-1)}_{n! \text{ раз}}$

$= \begin{cases} 2(2^n-1), \text{ если } n! \not\vdots\, 2 \\ 0, \text{ если } n! \,\vdots\, 2 \end{cases} = \begin{cases} 2, \text{ если } n=1 \\ 0, \text{ если } n>1 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} 2, \text{ если } n=1 \\ 0, \text{ если } n>1 \end{cases}$ + 25б

Вариант 1. Задание 2.

1) Пусть какая-то строка начинается с чисел a, b. Тогда 3-м должно быть число $32-a-b$, 4-м – число $32-(32-a-\cancel{b}+\cancel{b})=a$, 5-м – $32-(32-\cancel{a}-b+\cancel{a})=b$. Т.к. число задаётся двумя предыдущими, ~~[illegible]~~ в строке будут повторяться $a, b, 32-a-b, a, b, 32-a-b, \ldots$

Аналогично со столбцами. Пусть a, b, c, d – четыре ~~[illegible]~~ клетки в верхн. левом углу. Тогда таблица будет имет следующий вид:

$a,\ b,\ 32-a-b,\ a,\ b,\ 32-a-b, \ldots \ldots a$

$c\ \ d,\ 32-c-d,\ c,\ d,\ 32-c-d, \ldots \ldots C$

$32-a-c,\ 32-b-d,\ a+b+c+d-32, \ldots \ldots 32-a-c$

$a,\ b,\ 32-a-b,\ a,\ b,\ 32-a-b, \ldots \ldots a$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \qquad \vdots$

$a,\ b,\ 32-a-b, \ldots \ldots a$

Несложно заметить, что такая таблица подходит

Вариант 1. Задание 2 (продолжение).

Сумма по периметру — это сумма первого и последн. столбцов + сумма первой и посл. строк — сумма угловых клеток. (ф-ла включ. -искл.)

$256 \equiv_3 1$ и $1024 \equiv_3 1$, поэтому перв. и посл. строки, а также перв. и посл. столбцы совпадают.

$$\sum_{\text{по периметру}} = \Big(\underbrace{(a+b+32-a-b)+(a+b+32-a-b)+\ldots+(a+b+32-a-b)}_{85 \text{ раза}}+a\Big)\cdot 2+$$

$$+\Big(\underbrace{(a+c+32-a-c)+(a+c+32-a-c)+\ldots+(a+c+32-a-c)}_{341 \text{ раз}}+a\Big)\cdot 2-4a=$$

$\left\lfloor \frac{256}{3} \right\rfloor = 85$ $\left\lfloor \frac{1024}{3} \right\rfloor = 341$

~~Ответ~~

$$=(32\cdot 85+a)\cdot 2+(32\cdot 341+a)\cdot 2-4a=64\cdot 85+64\cdot 341=$$

$$=64\cdot 426=\cancel{27136}\ 27264.$$

+3 б

Ответ: 27136.

2)

Бланк ответов