ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302436264270

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия БОЛДИНОВА

Имя МАРИЯ

Отчество АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения 13 08 2007

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 259

Телефон 89873480555

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302436264270

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	0	6					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	6					

Итоговый балл 46

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№2

$a, b, c > 0$, $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Док-ть: ~~что~~ $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

1) Рассмотрим $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a\sqrt{1-b^2-c^2+b^2c^2}$ $\Big| \Leftrightarrow$

Из условия: $b^2+c^2 = 1-a^2-2abc$

$\Leftrightarrow$ $a\sqrt{1-(1-a^2-2abc)+b^2c^2} = a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2} = a\sqrt{(a+bc)^2} =$
$= a\cdot|a+bc| = a^2+abc$

т.к. $a, b, c > 0$, $a+bc>0$

2) Аналогично действием с первым корнем:

$b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)} = b^2+abc$

$c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = c^2+abc$

3) Из п.1 и п.2 левая часть неравенства преобразуется

$a^2+abc+b^2+abc+c^2+abc = a^2+b^2+c^2+3abc = 1+abc$

4) Сравним $1+abc$ и $2\sqrt{abc}$

$1+abc \vee 2\sqrt{abc}$ $|\wedge 2$

$1+2abc+a^2b^2c^2 \vee 4abc$ $|-4abc$

$1-2abc+a^2b^2c^2 \vee 0$

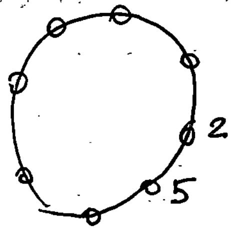
$(1-abc)^2 \vee 0$

квадрат всегда неотрицателен, т.е $\geq 0 \Rightarrow 1+abc \geq 2\sqrt{abc}$ ✓

$\Rightarrow$ Заменим левую часть обратно:

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$. Чтд.

№3



Число 2 делится только на 2 и 1, тогда с другой стороны от него будет или 3, или 4, или 6, или 7

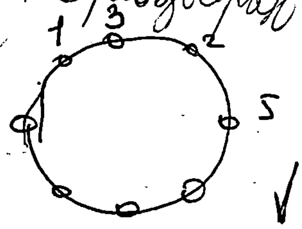
4.1) при 3: Число 3 делится на 3 и 1, тогда если с одной стороны от него 2, то с другой 1, или 3 (невозможно, это само число), или 5 уже занято

см на обороте

№3 продолжение

Аналогичными решениями понимаем, что 7-2-5 тоже невозможно

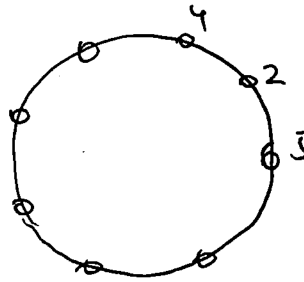
Не разобрал



Промежуточно круг выглядит так:

Тогда ~~да~~ следующая цифра точно 4. После нее должна быть или 5, или 2, или 3. Они все уже использованы => расклад 3-2-5 невозможен.

случай 2) 4-2-5: при таком раскладе обоих от 4 должна быть или 6, или 3, или 1, или 4 (невозм)



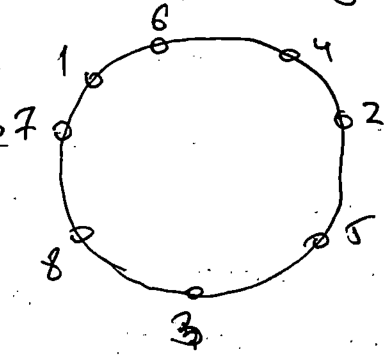
подслучай 1: ~~стоит~~ 3. Тогда следующая цифра может ~~быть только~~ или 7 1. После 1 должны стоять или 4, или 2, они обе заняты => противоречие

подслучай 2: стоит 1. После 1 будет 3 (могут быть или 3, или 5, 5 - уже занята). Тогда после 3 или 4, или 2, а они обе использованы => противоречие.

Тогда гарантированно, что с другой стороны от 4 будет цифра 6. Так как 4 (4 6) - единственная цифра, которая может стоять возле 2, а ~~6 - единственная рядом с 4, они точно будут рядом~~. вторая цифра будет с другой стороны, т.е. они будут рядом. ч.т.д.

~~Пример такого круга:~~

случай 6-2-5 похож на 4-2-5. Просчитав, поймём, что цифры 4 и 6 все равно будут стоять рядом



перебор неполный

№1

1) Если сложить все суммы по вертикали и горизонтали, то получится, что каждое число от 1 до 36 посчитали по два раза (когда мы считаем сумму всех горизонталей, то мы складываем все числа, также с вертикалями). Тогда сумма всех чисел: $2 \cdot \left(\frac{1+36}{2} \cdot 36\right) = 37 \cdot 36 = 1332$.

2) Предположим, что есть квадрат, удовлетворяющий условию => Суммы образуют арифметическую прогрессию с шагом 1. Пусть a_1 - мин. число => $a_{12} = a_1 + 11$. Тогда их сумма:

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 11}{2} \cdot 12 = (2a_1 + 11) \cdot 6$$

3) Из п.1 сумма такой прогрессии должна быть 1332.

$(2a_1 + 11) \cdot 6 = 1332$

$2a_1 + 11 = 222$

см на след. странице

Бланк ответов

$2a_1 = 211 \Rightarrow a_1$ - дробное число. Это невозможно, т.к. сумма целых чисел дробной быть не может => противоречие (1)

=> нельзя построить такой квадрат. +

Ответ: нет, нельзя

N4

Раскрасим доску по рядам: все нечётные в черный, чётные - в белый. Заметим, что оборотень закрашивает клетки только того цвета, на котором стоит. Далее, разделим ряды одного цвета на пары. Заметим, что в таких парах оборотень может раскрасить за раз не более 4 клеток (минимум - 3). Чтобы закрасить ряд, нужно хотя бы 4 оборотня. При правильной растановке на второй ряд пары понадобится только 2 оборотня.

O	O					O	O
		O			O		

Меньше 4 брать нельзя, т.к. они закрашивают клетки через одну, а клеток одной четности в ряду 4 штуки => на одну чётность нужны 2 оборотня. =>

=> на ~~не~~ второй ряд нужно 2 оборотня (по 1 на каждую четность) (1)

=> Всего на 2 ряда нужны 6 оборотней. Вторая пара рядов будет такой же, т.к. клетки, закрашенные другой парой роли не сыграют => на один цвет клеток нужны 12 оборотней.

Тогда так как цвета на доске 2, чтобы все поля бились, нужно поставить 24 оборотня.

Пример:

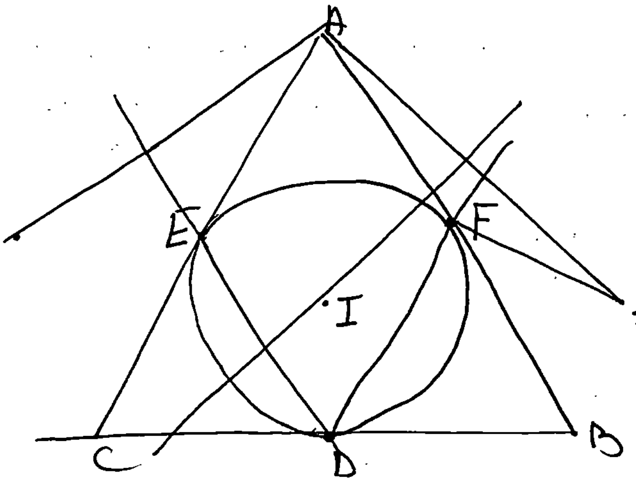
O	O					O	O
		O			O		
		O			O		
O	O					O	O
O	O					O	O
		O		O			
		O		O			
O	O					O	O

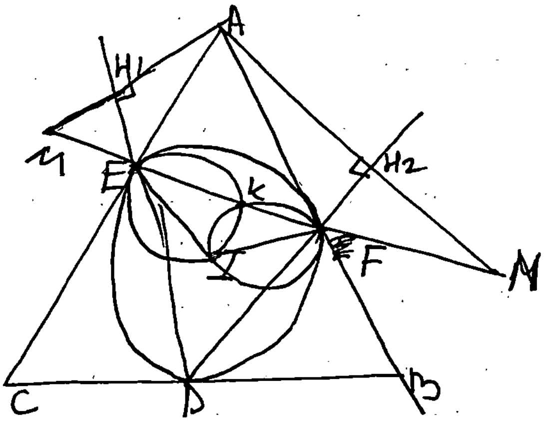
неверно

Ответ: 24

см на обороте

№5





Дано: $\triangle ABC$

~~B~~ $\omega_1(I; r)$ - впис.

$\omega_1 \cap BC = D$; $\omega_1 \cap AC = E$; $\omega_1 \cap AB = F$

N - симм. т. A отн. DF, M - симм. т. A отн. DF

$\omega_2(O; R)$, IE - диам. ω_2

$\omega_3(O_1; R_1)$, IF - диам. ω_3

$\omega_2 \cap \omega_3 = I; K$

Док-ть: $K \in MN$

Доказательство:

1) т. M симм. т. A => $AH_1 \perp DE$, $AH_1 = MH_1$ => ~~MH_1~~ EH_1 - выс. и мед. => $\triangle MEA$ - р/б => $ME = AE$

2) Аналогично п. 1 $AF = FN$

3) E, F - точки касания => $AE = EF$ (отрезки касательных) => $\triangle AEF$ - р/б

неверно

=> $\angle MEA = \angle NFA$ (смежные с углами р/б $\triangle$), $ME = AE = AF = FN$ => ✓

<=> $\triangle MEA = \triangle NFA$ (по 2 сторонам и углу)

4) Из п. 3 делаем вывод, что точки M, E, F, N лежат на одной прямой из-за смежности углов => задача сводится к доказательству того, что $K \in EF$

5) IE - диам. (усл.) => $\angle IKE = 90°$. Аналогично, $\angle IKF = 90°$ (впис. опир. на диам.)

Тогда так как $\angle IKE$ и $\angle IKF$ - смежные $(90° + 90° = 180°)$ => $K \in EF$ ✓ => $K \in MN$. Чтд.

7

Бланк ответов