ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101927899787

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия КОРОТЫШЕВ

Имя ТИМОФЕЙ

Отчество ВАЛЕРЬЕВИЧ

Дата рождения 19 09 2008

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 229

Телефон 89581600260

Дата 05 02 2024 **Подпись** ТВК

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101927899787

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	25	00	19						
Балл члена жюри №2	25	25	00	19						

Итоговый балл 069

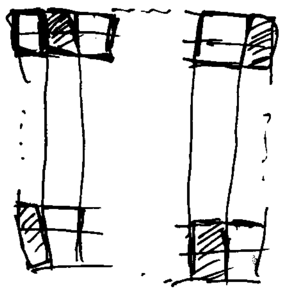
Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Разобьём таблицу на вертикальные фигуры 1×2 :



и покрасим их в два ~~цвета~~ цвета, чередуя цветами. Пусть одни полоски будут белого цвета, а другие — черного. Тогда $S_{б_1}+S_{ч_1}=64$, Заметим, что $S_{б_2}+S_{ч_1}=64 \Rightarrow S_{б_1}=S_{б_2}$, аналогично $S_{ч_1}=S_{ч_2}$, $S_{б_2}=S_{б_3}$; $S_{ч_2}=S_{ч_3}$ ... $\Rightarrow$] сумма чисел в белой полоске равняется x, тогда во всех белых полосках сумма по x, а во всех черных — по $(64-x)$. Заметим, что $512 \vdots 2$ и $2048 \vdots 2 \Rightarrow$ в первом столбце встречается по $\frac{2048}{2\cdot2}=512$ полосок каждого цвета, аналогично во втором. Тогда разобьём полоски из первого и последнего столбцов по ~~парам~~ парам из черной и белой полосок. Получаем 1024 пары черная-белая, в каждой из них сумма равняется 64 $\Rightarrow$ сумма чисел в первом и последнем столбце $S'=1024\cdot64=2^{16}$

Аналогично посчитаем сумму первой и последней строках, повернув таблицу на $\frac{\pi}{2}$ рад. и проделав аналогичные действия, получаем $S''=2^{14}$. Тогда получаем $S'''=S'+S''=2^{14}+2^{16}=5\cdot2^{14}$. Но в S''' угловые клетки вошли по два раза. Заметим, что из-за четности длины и ширины таблицы, угловые клетки встречаются в полосках каждого цвета по два раза, а значит составляют сумму 64.

$\Rightarrow S_{ок.}=S'''-64=2^{14}+2^{16}-2^{6}=2^{6}(2^{8}+2^{10}-1)=2^{6}\cdot1279=81856$

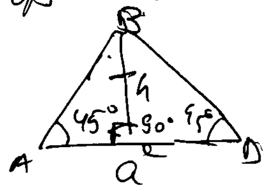
+ 25б

№2

Обозначим сторону треугольника, т.е длину склона, меньшей горы за $x_м$, а большей — за $x_б$. (Если горы равны, обозначим случайным образом). Тогда общая протяженность поверхности гор $= 2x_м + 2x_б \Rightarrow$

$\Rightarrow x_м + x_б = 2048$ $\quad$ S меньшей горы равна $\frac{1}{2}h \cdot a$;

$x_б = 2048 - x_м$



$\triangle ABC$: $\angle A = 45°$

$BC \perp AD \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$

(по Т. Пифагора)

$\Rightarrow BC = \frac{x_м}{\sqrt{2}}$

$AD = 2AC = x_м\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{меньшей} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_м}{\sqrt{2}} \cdot x_м\sqrt{2} = \frac{x_м^2}{2}$

аналогично $S_{большей} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_б}{\sqrt{2}} \cdot x_б\sqrt{2} = \frac{x_б^2}{2}$

$\Rightarrow S_м + S_б = \frac{1}{2}(x_м^2 + x_б^2)$ раз площадь гор минимальна, то $\frac{1}{2}(x_м^2 + x_б^2) - \min \Rightarrow (x_м^2 + x_б^2) - \min$

Раз $x_м + x_б = 2048$

$x_м^2 + 2x_м x_б + x_б^2 = 2048^2$

$\underbrace{x_м^2 + x_б^2}_{\min} + 2x_м \cdot x_б = 2^{22}$

$\Rightarrow$ нужно найти max значение $2x_м \cdot x_б$ до 2^{22}.

$2x_м(2048 - x_м) = 4096x_м - x_м^2$ — наиб. знач. на $x \in (0; 1024]$ $(x_м \le x_б)$

$F(x_м) = -x_м^2 + 4096x_м$ — гр. пар., кв. ф., ветви вниз $(a < 0)$

$x_{м0} = -\frac{b}{2a} = 2048 \Rightarrow$ при $x \in (0; 1024)$ $F(x_м)$ — наиб при $x = 1024$

$\Rightarrow$ минимальная площадь гор будет $\frac{1}{2}\left(1024^2+(2048-1024)^2\right)=$
$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1024^2 = 2^{20}$.

+ 25 б

№ 4

(I) 15 б

Чтобы найти такие пары разложим число X на простые делители: $X = a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\dots$ Тогда возьмём наибольшую степень делителя a, т.е. a^{α}, тогда ей в пару поставим число $b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\dots$. Заметим, что взять не наивысшую степень числа a мы не можем, ведь тогда число $X/a^{\alpha'}$, где $\alpha'<\alpha$ будет кратно a. Повторим ту же операцию для для всех делителей. Тогда кратность числа X относительно функции F(x) которая возвращает число наборов, которые можно составить из простых делителей этого числа. Значит число с наибольшей кратностью имеет больше всех простых делителей $\Rightarrow$ наиболее кратное число до 1024 — это наибольший факториал до 1024, т.е. $720=6!$, т.к. ~~720·7 ≤ 1024~~ будет 1 домножать на последовательные простые числа, пока число будет ≤ 1024. Таким образом получим число $X=2\cdot3\cdot5\cdot7$ с самой большой кратностью $X=210$, но мы можем домножить его на максимально возможное число, чтобы не превысить 1024 и получим $X=840$. + 4 б

Т.к. простые множители числа 101 : 101, то кратность числа 101 = 1.

№3

Чтобы поставить в первую лунку фишку, у нас есть 19 вариантов от 0 до 18 фишек, чтобы во вторую — $(19-x_1)$, потому что больше 18 мы поставить не можем. И так далее кол-во ~~фиш~~ вариантов поставить фишек:

$$19\cdot(19-x_1)(19-x_1-x_2)\dots(19\overbrace{-x_1-x_2-\dots-x_{18}}^{18}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ количество вариаций изначальной постановки зависит от того, какой ~~фишкой~~ ~~будущей~~ лункой мы добьём количество фишек до 18. Если в ~~первую лунку~~ первую по счёту лунку мы поставим 18 фишек, то вариаций начальной позиции — 19, если сначала мы поставим x_1 фишек, а потом — x_2 фишек, так что $x_1+x_2=19$, то вариаций нач. позиции:

$19\cdot 18$. И так далее. Получается, что всего

первые фишки вторые

позиций: $19+19\cdot 18+19\cdot 18\cdot 17+19\cdot 18\cdot 17\cdot 16+\dots+19! =$

$$= 19!\left(\frac{1}{18!}+\frac{1}{17!}+\frac{1}{16!}+\dots+\frac{1}{1!}\right)=19!\left(\frac{17!\cdot 16!\cdot\ldots\cdot 2!+18!\,16!\ldots 2!\ldots}{2!\ldots 18!}\right)=$$

$$= \frac{19!}{18!}+\frac{19!}{17!}+\dots+\frac{19!}{1!}.$$

$-$

Бланк ответов