ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302671262891

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ТКАЧЕНКО

Имя ЕЛИЗАВЕТА

Отчество ДЕНИСОВНА

Дата рождения 07 09 2006

Город участия ОМСК

Аудитория 21

Телефон +79836248216

Дата 05 02 2024 **Подпись** Ткаченко

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302671262891

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ОМСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 00 Количество черновиков к проверке 00

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	–	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	–	0					

Итоговый балл 50

Подпись члена жюри №1 Dlouf **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Пусть мы получили 12 требуемых чисел. Запишем их как $n_1, n_2, \dots, n_{12}$, где $n_{i+1} = n_i + 1$, иначе говоря, числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 ~~последовательно~~. Тогда сумму этих 12 чисел можно записать как $\frac{2n_1+11}{2} \cdot 12$.
С другой стороны, сумма этих 12 чисел равна удвоенной сумме всех чисел квадрата (при образовании 12 чисел каждое число подсчитывается дважды – 1 раз по вертикали и 1 раз по горизонтали). Тогда сумму этих чисел можно записать как $\frac{36 \cdot 37}{2} \cdot 2$.

Приравняем оба выражения:

$$\frac{2n_1+11}{2} \cdot 12 = \frac{36 \cdot 37}{2} \cdot 2 \Rightarrow 6(2n_1+11) = 36 \cdot 37 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n_1 + 11 = 6 \cdot 37 \Rightarrow 2n_1 + 11 = 222 \Rightarrow \underline{2n_1 = 211}$$

Можем заметить, что левая часть делится на 2, а правая – нет. Это значит, что n_1 – нецелое число, значит числа $n_1, n_2, \dots, n_{12}$ не являются последовательными числами.

Ответ: нет

+

№2

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a\cdot\sqrt{1-c^2-b^2+b^2c^2}$

Подставим вместо 1 данное в условии выражение и получим, что:

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a\cdot\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2} = a\cdot\sqrt{(a+bc)^2}$

Т.к. a, b и c - положительны, то $a+bc>0$, значит:

$a\sqrt{(1-b)^2(1-c^2)} = a(a+bc) = a^2+abc$

Аналогично получим, что:

$b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} = b^2+abc$; $c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = c^2+abc$

следовательно:

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = a^2+b^2+c^2+3abc$

Вместо $a^2+b^2+c^2+2abc$ подставим 1 и получим:

$a^2+b^2+c^2+3abc = 1+abc$

По неравенству о средних среднее арифметическое больше либо равно среднему геометрическому. Запишем неравенство о средних для чисел 1 и abc:

$\frac{1+abc}{2} \geq \sqrt{1\cdot abc} \Rightarrow \frac{1+abc}{2} \geq \sqrt{abc} \Rightarrow 1+abc \geq 2\sqrt{abc}$

следовательно

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

что и требовалось доказать.

№3

По другую сторону от 5 могут стоять либо 1 (2-1=1), либо 7 (7-2=5), либо 3 (3-2=1), чтобы было выполнено условие для 5.

1) Если с др. стор. от 5 стоит 7, то ~~точно я~~ с др. стор. от 7 может стоять либо 6 (6-5=1), либо 4 (5-4=1).

а) ~~Если стоит 6, то~~

Пусть рядом с 7 стоит 6, ~~тогда рядом с 6 стоит либо 4 (7-4=3) либо 8 (8-7=1).~~ Если рядом с 6 не стоит 4, значит может стоять или только 8 (8-7=1) чтобы был вып. усл. для 8. Дальше по кругу может стоять только 4 (6-4=2). Остались только цифры 3 и 1, но 4 не дел. на 8-1=7 и 8-3=5, значит так числа не могут быть расставлены.

2 5
? 7
4 8 6

б) Пусть рядом с 7 стоит 4. Если рядом с 4 не стоит 6, то может стоять или 3 (7-3=4), или 8 (8-7=1). ~~не может стоять ни одна из оставшихся цифр~~ ~~Если это, то дальше по кругу~~
Если ~~это~~ 3, то дальше по кругу может стоять только 1. Далее остаются только 8 и 6, но 6-3≠1 и 8-3≠1 => такое расположение не может быть.

2 5
? 7
1 3 4

Если это 8, то дальше может стоять 3 (4-3=1), но дальше либо 6, либо 1, что невозможно (8-6=2; 8-1=7).

2 5 7
? 4
3 8

Также дальше может стоять 6. но далее либо 3, либо 1, что невозможно (8-3=5; 8-1=7) т.к. не вып. усл. для 6.

2 5
? 7
6 8 4

2) Если с др. стор. от 5 стоит 1, то с др. стор. от 1 может стоять либо 6, либо 4 (6-5=1; 5-4=1).

а) Пусть рядом ~~с~~ с 1 стоит 6. Далее, кроме 4, может стоять или 3, или 7 (3-1=2; 7-1=6) чтобы было вып. усл. для 6

Если это 3, то дальше может стоять только 7 (7-6=1), а дальше только 4 (4-3=1). Остаётся цифра 8, которая будет стоять между 4 и 2, но тогда не будет выполнено усл. для 2 (8-5=3). Значит такое невозможно.

8 2 5
4 1
7 3 6

(см. продолж. на др. стр.)

Если это 7, то дальше нельзя поставить ни одну цифру, т.к. не вып. усл. для 7 (6 - 3 = 3; 6 - 4 = 2; 8 - 6 = 2). Значит такое располож. невозможно.

2 5 1 6 ? 7

б) Пусть рядом с 1 стоит 4. Если рядом с 4 не стоит 6, то рядом с 4 может стоять только 3 (3 - 1 = 2). Далее может стоять только 7 (7 - 4 = 3). А дальше не может стоять ни одна из оставшихся цифр, чтобы вып. усл. для 7 (8 - 3 = 4; 6 - 3 = 3). Такое положение невозможно.

2 5 1 4 3 7 ?

3) Если с др. стор. от 5 стоит 3, то с др. стор. от 3 может стоять либо 4, либо 6, либо 8, чтобы было вып. усл. для 3 (5 - 4 = 1; 6 - 5 = 1; 8 - 5 = 3).

а) Пусть рядом с 3 стоит 4. ~~[illegible]~~ ~~Рядом~~ Рядом с 4 может стоять либо 1, либо 7, чтобы было вып. усл. для 4 (3 - 1 = 2; 7 - 3 = 4).

Если это 1, то чтобы было вып. усл. для 1, далее должна стоять либо 3, либо 5 (4 - 3 = 1; 5 - 4 = 1), но они уже стоят. Такой вариант не возможен.

2 5 3 4 1 ?

Если это 7, то далее могут стоять 1, 6, или 8, которые не выполнят усл. для 7 (6 - 4 = 2; 4 - 1 = 3; 8 - 4 = 4). Такой вариант невозможен

2 5 3 4 7 ?

б) Пусть рядом с 3 стоит 6. Если далее не стоит 4, то может стоять только 1, чтобы было вып. усл. для 6 (3 - 1 = 2). Далее может стоять только 7 (7 - 6 = 1), ~~Далее только~~ чтобы было вып. усл. для 1.

Далее может стоять только 8, чтобы было вып. усл. для 7 (8 - 1 = 7). Остаётся 4, которая будет стоять между 2 и 8. Такое располож. Но тогда не будет вып. усл. для 8 (7 - 4 = 3). невозможно.

4 2 5 3 6 1 7 8

в) Пусть рядом с 3 стоит 8. Далее, чтобы было вып. усл. для 8, может стоять или 1, или 4, или 7.

Если это 1, то, чтобы было вып. усл. для, может стоять только 7 (8 - 7 = 1). Остаются цифры 4 и 6, которые не вып. усл. для 7 (4 - 1 = 3; 6 - 1 = 5), значит такой вариант невозможен.

? 2 5 3 8 1 7

(продолж. на след. стр.)

Если это 4, то, кроме 6, далее может стоять только 7, чтобы было вып. усл. для 4 ($8-7=1$). Остаются цифры 6 и 1, которые не позволяют вып. усл. для 7 ($6-4=2$, $4-1=3$). Такой вар. невозможен.

? 2 5
7 3
4 8

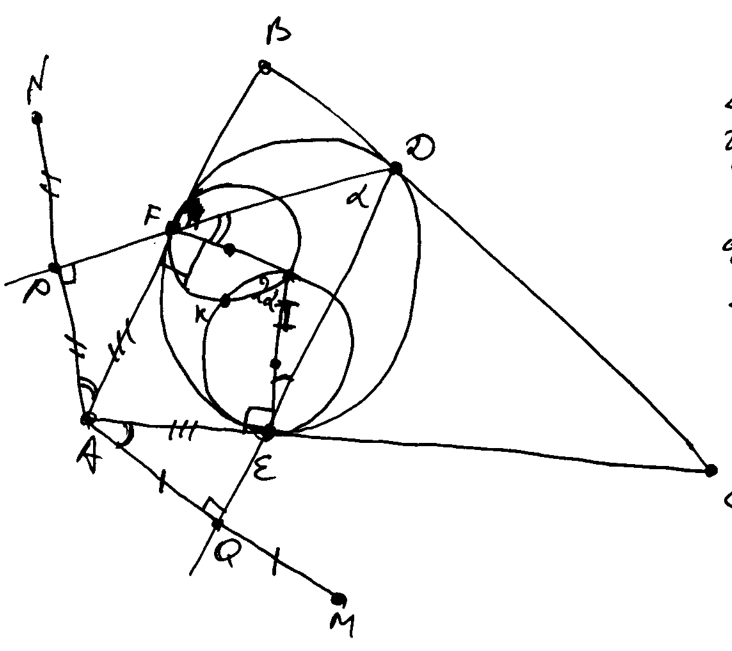
Если это 7, то далее может стоять только 1, чтобы было вып. усл. для 7 ($8-1=7$). Далее может стоять только 6, чтобы было вып. усл. для 1 ($7-6=1$). Остаётся 4. Если её поставить на оставшееся место, то условия для всех чисел будут выполнены, однако оно будет стоять рядом с 6.

4 2 5
6 ? 3
1 8
7

Таким образом рассмотрены все возможные варианты, в которых 4 и 6 не стоят рядом. И ни один такой вариант не удовлетворяет всем условиям расстановки чисел. Значит и по условию задания такая расстановка есть. Значит в ней обязательно цифры 4 и 6 стоят рядом. ч.т.д.

потерян лист в дереве перебора +.

N5



Пусть $\angle FDE = \alpha$, тогда $\angle FIE = 2\alpha$ (впис. угол в 2 раза меньше центрального)

$\angle FIE + \angle FAE = 180°$ ($360° - \angle AFI - \angle AEI$, где $\angle AFI = \angle IEA = 90°$, как $\angle$ м/у кас. и рад., провед. в точку кас.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FAE = 180° - 2\alpha$

$\angle FPA = \angle EQA = 90°$ (по усл. о симм.)

$\angle PAQ + \angle PDQ = 180°$ ($360° - \angle FPA - \angle EQA$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \angle PAQ = 180° \Rightarrow \angle PAQ = 180° - \alpha$

$\angle PAQ = \angle FAE + \angle PAF + \angle EAQ = 180° - 2\alpha + \angle PAF + \angle EAQ \Rightarrow$

$\Rightarrow 180° - \alpha = 180° - 2\alpha + \angle PAF + \angle EAQ$

$\angle PAF + \angle EAQ = \alpha$