ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101607294267

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Фамилия ЕМЕШЕВ

Имя СЕРАФИМ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 31 07 2007

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Аудитория 205

Телефон 89373880085

Дата 05 02 2024 **Подпись** Емеш

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101607294267

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- ☐ информатика
- ☐ история
- ☒ математика
- ☐ обществознание
- ☐ русский язык
- ☐ физика
- ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	5	0	0					
Балл члена жюри №2	20	20	5	0	0					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1 Допустим, это возможно, то есть у нас есть 12 чисел:
$n, n+1, n+2, \dots, n+11$ – которые являются суммами горизонталей и вертикалей. Где n – наименьшее из них

Пусть S – сумма всех чисел в квадрате, тогда если мы сложим $n, n+1, \dots, n+11$ мы получим $2S$, так как сумма всех вертикалей $= S$ и сумма всех горизонталей $= S$

$n + n+1 + n+2 \dots + n + 11 = 12n + \frac{1+11}{2} \cdot 11 = 12n+66$, т.е $2S = 12n+66 \Rightarrow$
$\Rightarrow S = 6n+33$ (1)

Мы знаем, что в квадрате расположены числа от 1 до 36 и каждое исп. 1 раз (из условия), тогда мы можем найти S, $S = 1+2+3\dots+36 = \frac{36+1}{2} \cdot 36 = 666$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{из (1)} \Rightarrow S = 6n+33 \\ \text{из (2)} \Rightarrow S = 666 \end{array}\right| \Rightarrow 6n+33 = 666 \Rightarrow n = \frac{633}{6}$$

, но $633 \not\vdots 6 \Rightarrow n$ – не целое число, однако n – сумма ~~наименьшая~~ какой-то вертикали или горизонтали, т.е целое, т.к числа от 1 до 36 – целые, – противоречие, следовательно составить такой квадрат невозможно. нельзя

Ответ: ~~Невозможно~~ Нельзя.

(+)

N 2 (от противного) Допустим такого номера $i \in [1;2022]$, $a_i^2 \geq 2a_{i+1}-1$; не существует, ~~тогд~~ тогда для всех $i \in [1;2022]$ $a_i^2 < 2a_{i+1}-1$, $i \in N$

1) $a_i^2 < 2a_{i+1}-1 \Rightarrow$ ~~$a_{i+1} > 0$, тк~~

$a_{i+1} > \frac{1}{2} > 0$, тк $a_i^2 > 0$ - квадрат,

~~тогд~~ тогда $a_i > 0$, где $i \in [2;2023]$. &

Из условие дано, что $a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1 \Rightarrow a_1 \geq \frac{1}{2} > 0 \Big| \Rightarrow \Rightarrow$

$\Rightarrow a_i > 0$ для ~~всех~~ $i \in [1;2023]$. (*)

2) из (*) $a_i > 0$, тогда мы можем применить неравенство о средних ~~выда~~ для чисел a_i^2 и 1:

$\frac{a_i^2+1}{2} \geq \sqrt{a_i^2 \cdot 1} \Rightarrow a_i^2 \geq 2a_i - 1$. (**)

$a_n > 0$ $n \in [1;2023]$

~~$a_i > 0$~~

Заметим, что $a_i^2 < 2a_{i+1} - 1$, ~~тогда~~
$a_i^2 \geq 2a_i - 1$ $\Big| \Rightarrow a_{i+1} > a_i$ (***)

В ином случае $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$, что не может быть (в ~~это~~ данном случае)

3) из (***) $\Rightarrow a_{i+1} > a_i$, тогда $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{2023}$ $\Big| \Rightarrow a_1 < a_{2023}$

$a_1 > 0$

$a_{2023} > 0$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 < a_{2023}^2$ (X)

Из условия $a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1$

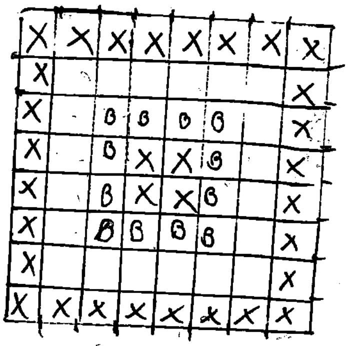
Из (**) $\Rightarrow a_i^2 \geq 2a_i - 1 \Rightarrow a_1^2 \geq 2a_1 - 1$ $\Big| \Rightarrow a_1^2 \geq a_{2023}^2$, однако из (X) $\Rightarrow a_1^2 < a_{2023}^2$ —

— противоречие, следовательно наше утверждение неверно, и ~~тогда~~ существует $i \in [1;2022]$, для которого $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$

чтд

N 4

рис. 1



Заметим, что на доске есть клетки, которые может бить один единственный вампир, следовательно такой вампир можно будет ставить на доске.

~~Д~~ Такие клетки, это клетки находящиеся в углу и соседние с ними, т.е (рис. 2).

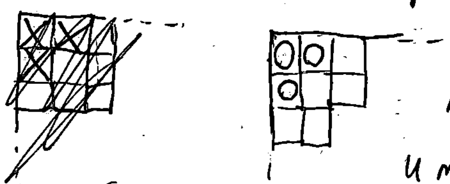


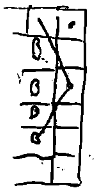
рис. 2

И так для 4 углов кажд. (каждого)

Всего таких клеток: $3 \cdot 4 = 12$ => следовательно на доске будет гарантированно (для каждого) стоять 12 вампиров.

Поставим данных вампиров и отметим клетки, которые они бьют. (рис. 1)

Всего осталось 20 клеток. Заметим, что если мы будем ставить вампиров в небитые поля, то они всегда будут бить ~~только~~ не более 2 не битых поля: собственное и еще одно или только собственное.



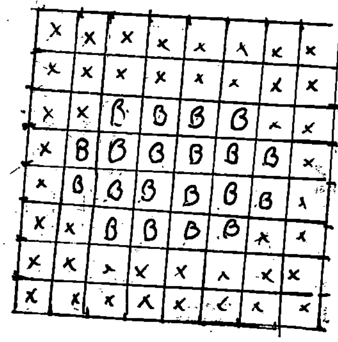
Если мы будем ставить вампиров в крайние, битые поля, то они будут бить 0 ~~н~~ не битых полей.

Если мы поставим в 4 центральных битых поля, то каждый вампир будет бить 3 не битых поля.

В - вампир

Оценим доступный минимум. Если мы не ставим в центр. поле, то В потребуется минимум $\frac{20}{2} = 10$

Если будем ставить, то они будут бить $4 \cdot 3 = 12$ полей. $20 - 12 = 8$ $\frac{В}{2}$ ~~для~~ полей останется, $\frac{8}{2} = 4$ В будут бить данные поля, ~~следова~~ всего 8 вампиров в данном случае, и меньше быть не может, т.к нет более эффективно бьющих вампиров, т.е минимальное кол-во вампиров: $12 + 8 = 20$. Приведем пример: (рис. 3)



В - вампир

х - битое поле

(рис. 3)

Ответ: 20 вампиров

№5

№5 1) Допустим существует пара чисел (a, b), у которых число цифр в записи одинаково и нечетно, а произведение является приятным числом. Тогда, мы можем представить новые числа (X, Y).

$X = 100a + 11$

$Y = 100b + 11$, т.е мы можем присоединить к числам a и b справа две единицы, тогда числа X и Y - нечетные, т.к количество цифр $= H + 2 = H$, 1 и 1 - нечетные.
=> X и Y - приятные числа
В свою очередь произведение цифр $X = a$
$Y = b$, т.к были добавлены единицы, не влияющие на произведение: $n \cdot 1 = n$, т.е произведение цифр X и Y также являются приятными числами, так как равны произведением цифр соответственно a и b.
Аналогичные действия мы можем провести для (X;Y) и получить пару приятных чисел (m, n), произведение цифр которых также является приятным числом.
Далее ~~мы~~ такую же операцию с (m, n), и так далее, такую операцию можно проводить бесконечно, так как по усл. задачи нет верхнего предела, следовательно мы можем получить бесконечно много пар ~~прия~~ таких приятных чисел, (подх. под условия) (произв. цифр. к.т нечетное - приятное число)

2) Докажем, что ~~начальная~~ пара (a, b) существует. Пример $a = \cancel{...}$ 151 - приятное число

~~151~~
~~a~~
~~171 b - приятные числа~~;

$1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$

~~$3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$~~ - приятное число

$b = 171$ - приятное число

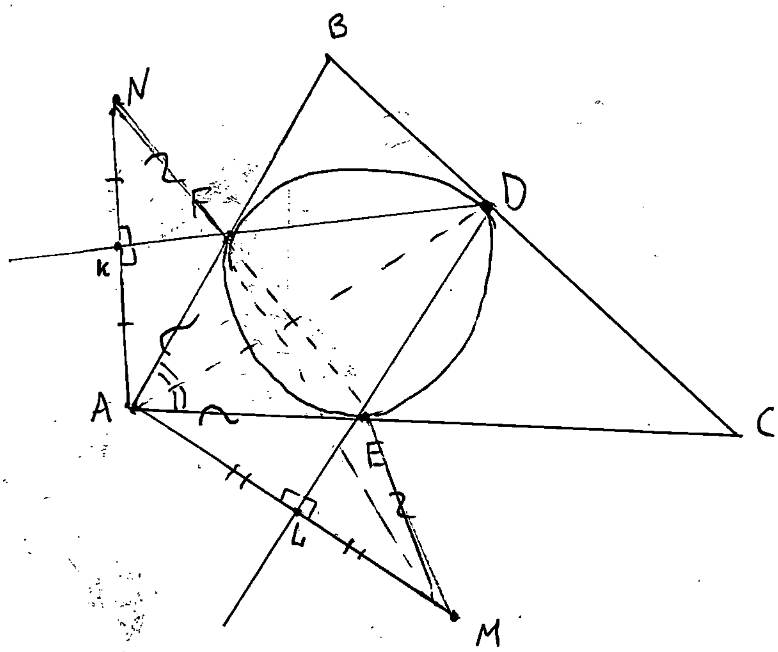
$1 \cdot 7 \cdot 1 = 7$ - приятное число, тогда ~~мы можем применить~~

~~Для данных чисел~~ ~~задачи п.1~~ ~~пункт 1~~ исходя из пункта 1 => таких пар чисел бесконечное множество, т.к первоначальная пара (a, b) - существует.

Неверно понято усл. задачи —

2 пд.

N 3



Дано:
$\triangle ABC$
W вписана в ABC
W касается AB = т. F
W касается BC = т. D
W касается AC = т. E
N симметр. A отн. ~~AB~~ DF
M сим. A отн. DE

Док-ть
MENF - параллелограм

Док-во

1) N симметрично DF, т.е. т. K ∈ прямой FD, $AK \perp FD$, $NK \perp FD$, $NK = AK$; ✓

Аналогично для точки M сим. DE, => т. L ∈ прямой DE, $AL \perp DE$, $ML \perp DE$, $AL = ML$ ✓

2) Заметим, что $\angle FKN = 90° = \angle AKF$, $KN = AK$ => FK - ~~биссектриса~~ высота и медиана для $\triangle NFA$ => ~~$\triangle NF$~~ $\triangle NFA$ - р/б => $NF = AF$ (1) ✓

Аналогично для $\triangle AEM$: $\angle ALE = \angle ELM = 90°$, $AL = LM$ => EL - выс. и медиана => $\triangle AEM$ - р/б => $AE = EM$ (2) ✓

3) AF касательная к окружности W, AE касательная к окружности W => $AF = AE$ (3) (касательные выход. из одной точки)

4) Из (1)(2)(3) => $NF = AF$, $AE = EM$, $AF = AE$ => $NF = AF = AE = EM$ => т.е. $NF = EM$ ✓

Центр окружности - пересечение биссектрис $\triangle ABC$.

$\angle F \ E \cdot \overset{\frown}{FE} = 2\alpha$ => $\angle BAE = 180 - 2\alpha$; $\angle FDE = \alpha$; $\angle AFE = \angle AEF = \alpha$ ($\triangle AFE$ - р/б) ✓

~~6) тогда $\angle FEN = \angle EFM$, $\Rightarrow$ $FM \parallel NE$ (FE-секущая), т.к. $\angle FEN$ и $\angle EFM$ - накрестлежащие,~~

~~7) $FM \parallel NE$, $NF = EM$ $\Rightarrow$ $MENF$-параллелограм.~~

6) тогда $\angle NFE = \angle FEM$ $\Rightarrow$ $FF \parallel EM$ (FF-секущая)

накрест леж.

почему? не обосновано.

7) $FM \parallel EM$, ~~NFEM~~ $NF = EM$ $\Rightarrow$ $MENF$-параллелограм

Пояснение: ~~NE~~ по теореме косинусов $NE^2 = NF^2 + FE^2 - 2NF \cdot NE \cdot \cos\angle$ ~~NEE~~ NFE

$NF = EM$

~~$\angle NE$~~

$\angle NFE = \angle FEM$

~~EM~~ $FM^2 = FE^2 + EM^2 - 2 \cdot FF \cdot EM \cdot \cos\angle FEM$

$\Rightarrow NE^2 = FM^2 \Rightarrow NE = FM$

$NE = FM$, $NF = EM$, ($FM \parallel EM$) $\Rightarrow$ $MENF$ - параллелограм