

Титульный лист

Направление информатика история математика
 обществознание русский язык физика
 химия

Класс 8 9 10 11

Фамилия Б У Б Б

Имя А Л И С А

Отчество Д М И Т Р И Е В Н А

Дата рождения 1 9 0 6 2 0 0 8

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Аудитория И 4 0 8

Телефон 8 9 0 0 2 1 5 4 7 2 6

Дата 0 5 0 2 2 0 2 4

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

<input type="checkbox"/> информатика	<input type="checkbox"/> история	<input checked="" type="checkbox"/> математика
<input type="checkbox"/> обществознание	<input type="checkbox"/> русский язык	<input type="checkbox"/> физика
<input type="checkbox"/> химия		

Класс

<input type="checkbox"/> 8	<input checked="" type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 11
----------------------------	---------------------------------------	-----------------------------	-----------------------------

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0
Балл члена жюри №2	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0

Итоговый балл 260

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Handwritten title or header text, possibly "K... .."

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

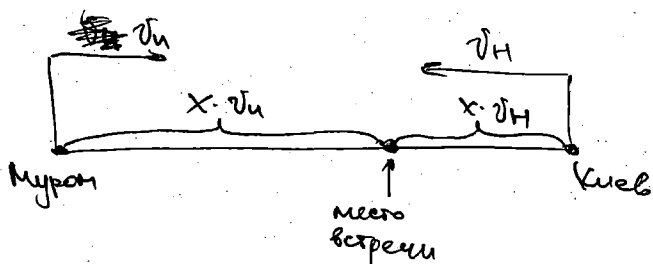
Handwritten text at the bottom left of the page, possibly a signature or date.

Бланк ответов

N 1.

Пусть скорости Ильи Муромца и Настасьи Микулиной - это $v_1 \frac{км}{ч}$ и $v_2 \frac{км}{ч}$ соответственно, а встретились они через x после начала движения.

Тогда?



За те шесть часов, которые Илья Муромец сидел, Настасья прошла $x \cdot v_1 - x \cdot v_2 = x(v_1 - v_2)$, т.к. по условию в момент возобновления движения Ильи, Настасья оставалась пройти тот же путь, то есть $x \cdot v_2$.

Получаем, что $v_2 = \frac{x(v_1 - v_2)}{6}$. Также мы знаем, что Илья Муромцу преодолел расстояние $x \cdot v_1$ за час $\Rightarrow v_1 = \frac{x \cdot v_1}{1} = x \cdot v_1$.

$$v_2 = \frac{x \cdot v_1 - x \cdot v_2}{6}$$

$$v_2 = \frac{x^2 \cdot v_1 - x \cdot v_2}{6}$$

$$1 = \frac{x^2 - x}{6}$$

$$x^2 - x = 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

~~Скорость~~ ^{время} не может быть отрицательным $\Rightarrow x=3$.

Всего, чтобы пройти путь $x \cdot v_1$ Настасье нужно было $\frac{x \cdot v_1}{v_2} = 3$ часов. Но т.к. один уже прошел, то ответом будет $3-1 = 2$ часа.

Ответ: 2 часа

N2.

Для начала докажем, что сумма кубов ^{натуральных} чисел от 1 до n равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

воспользуемся методом мат. индукции.

База индукции для n=1:

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1$$

1=1, ~~на~~ верно \Rightarrow база инд. доказана.

Шаг индукции: пусть уст. выполн. для n=k-1. Докажем его для n=k:

$$(1) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 = \frac{(k-1)^2 \cdot k^2}{4} \quad (\text{известно})$$

$$(2) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (\text{надо доказать})$$

Найдем разность левых и правых частей рав-в (1) и (2). Если они равны, то (2) доказано.

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 + k^3 - (1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3) = k^3$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{(k-1)^2 \cdot k^2}{4} = \frac{k^2}{4} (k^2 + 2k + 1 - (k^2 + 2k - 1)) = \frac{k^2}{4} \cdot 4k = k^3$$

$$k^3 = k^3 \Rightarrow \text{доказано. } \checkmark$$

Теперь мы знаем, что $1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Докажем, что $a_i = i^2 \cdot a_1$

Снова используем мат. индукцию:

База индукции для i=2: $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} = \sqrt{a_1 + a_2}$

$$a_1 + 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 = a_1 + a_2$$

$$a_2 = 2\sqrt{a_1 a_2}$$

$$a_2^2 = 4a_1 a_2 \quad (a_2(a_2 > 0))$$

$$a_2 = 4a_1$$

$$a_2 = 2^2 \cdot a_1 \Rightarrow \text{теза доказана.}$$

Шаг индукции. Пусть мы знаем, что $a_k = k^2 \cdot a_1$ для всех k от 1 до i-1. Докажем, что $a_i = i^2 \cdot a_1$

Бланк ответов

~~Найдите 2 эквивалентные выражения.~~

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_i} = \sqrt{a_1 + 2a_2 + \dots + i \cdot a_i} \quad (\text{no yes.})$$

~~$$\sqrt{a_1} + \sqrt{4a_2} + \dots + \sqrt{i^2 \cdot a_i} = \sqrt{a_1 + 2 \cdot 2a_2 + \dots + i^2 \cdot a_i}$$

$$a_1 + 2 \cdot 2a_2 + \dots + i^2 a_i = \sqrt{a_1 + 2^2 a_2 + \dots + i^2 a_i}$$~~

~~$$\sqrt{a_1} + \frac{i(i-1)}{2} \sqrt{a_i} = \sqrt{\frac{i^2(i+1)^2}{4} \cdot a_i + i \cdot a_i}$$

$$\frac{i^2(i-1)^2}{4} a_i + a_i + 2 \cdot \frac{i(i-1)}{2} \sqrt{a_i} \sqrt{a_i} = \frac{i^2(i+1)^2}{4} a_i + i a_i$$

$$a_i + i(i-1) \sqrt{a_i} = i a_i$$

$$a_i \sqrt{i-1}$$~~

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{4a_2} + \dots + \sqrt{(i-1)^2 a_i} + \sqrt{a_i} = \sqrt{a_1 + 2^2 a_2 + \dots + (i-1)^2 a_i + i a_i}$$

$$\sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_2} + \dots + (i-1)\sqrt{a_i} + \sqrt{a_i} = \sqrt{a_1 + 2^2 a_2 + \dots + (i-1)^2 a_i + i a_i}$$

$$\frac{(i-1) \cdot i}{2} \sqrt{a_i} + \sqrt{a_i} = \sqrt{a_i \cdot \frac{i^2(i-1)^2}{4} + i a_i}$$

~~$$\frac{i^2(i-1)^2}{4} a_i + a_i + 2 \cdot \frac{(i-1) \cdot i}{2} \sqrt{a_i} \sqrt{a_i} = a_i \cdot \frac{i^2(i-1)^2}{4} + i a_i$$~~

$$a_i + i(i-1) \sqrt{a_i} = i a_i$$

$$a_i(i-1) = i(i-1) \sqrt{a_i} \quad (i-1) (i \neq 1 \Rightarrow i-1 \neq 0)$$

$$a_i = i \sqrt{a_i}$$

$$a_i^2 = i^2 \cdot a_i \quad (a_i > 0)$$

$$a_i = i^2 \cdot a_i, \text{ ч.т.д.}$$

Тогда $a_{2023} = 2023^2 - a_1 \Rightarrow \frac{a_{2023}}{a_1} = \frac{2023^2 - a_1}{a_1} = 2023^2$

Ответ: 2023^2 +

№3.

Пусть кол-во рублей у Васи после покупки 1-й покупки - это \overline{aaaa} , где a и b - какие-то цифры, а после 2-й покупки - \overline{cddd} (c и d - тоже цифры).

$$\begin{array}{r} \overline{aaaa} \\ - \overline{229} \\ \hline \overline{cddd} \end{array}$$

Рассм. возможные значения которых может принимать b .

Предположим, что $1 \leq b \leq 9$. Тогда, ~~какой бы ни был~~
 $b < 9 \Rightarrow$ нужно будет занять десяток $9 \rightarrow$ вычитания \Rightarrow

$$\Rightarrow d = \overline{1b} - 9. \quad b \leq 8 \Rightarrow \overline{1b} \leq \overline{18} \Rightarrow \overline{1b} - 9 \leq \overline{18} - 9 \Rightarrow d \leq \overline{18} - 9 = 9.$$

d получается ~~никогда больше~~ как последняя цифра либо

$a-2$, либо $\overline{1a}-2$. $d+2$ равно последней цифре числа

~~a ($d \leq 9 \Rightarrow d+2 \leq 11 \Rightarrow d+2$ - всегда цифра). Поскольку $d+2 \leq 9$~~

~~$d+2$ - посл. цифра числа a , либо a , либо $\overline{1a}$. $d \leq 7 \rightarrow$~~

~~$a > d$~~
 $\Rightarrow d+2 \leq 9 \Rightarrow$ это всегда цифра. $d+2$ - всегда цифра \Rightarrow ~~$a \geq d$~~

т.к. чтобы d оказалось ~~меньше~~ ^{больше} a , должен произойти переход через разряд, но его нет.

Значит, чтобы вычесть из a двойку не нужно занимать

десяток ($a > d \geq 2$). Однако, при вычит. из b десятка

мы уже заняли десяток из одной из цифр a . Тогда

значения a на второй позиции и на третьей не совпадут,

т.к. ~~$a \geq 3$ и 2 цифра a на 3-й цифра a должна быть на~~

1 больше \rightarrow противоречие. Остались 3 варианта $9 \leq b < 10, 7, 8, 9$

† (1) $b = 0$:

$$\begin{array}{r} \overline{aaaa} \\ - \overline{229} \\ \hline \overline{cddd} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 1$$

$$\begin{array}{r} \overline{aaaa} \\ - \overline{229} \\ \hline \overline{c111} \end{array}$$

Посм. на 3-ю позицию.
 ~~$a \geq 4$~~ a - либо 4, либо 0.

Если $a = 4$,
 то на 2-й позиции значения не совпадут ($4-2 \neq 1$) \Rightarrow

$\Rightarrow a = 0$. Тогда $\overline{aaaa} = 0 \Rightarrow$

\Rightarrow противоречие (число 4-значное)

Бланк ответов

А 2) $b=7$.

$$\begin{array}{r} \overline{acida7} \\ - 229 \\ \hline cddd \end{array} \Rightarrow d=8$$

$$\begin{array}{r} \overline{aaa7} \\ - 229 \\ \hline c888 \end{array} \Rightarrow a=1$$

$$\begin{array}{r} \overline{1117} \\ - 229 \\ \hline 0888 \end{array}$$

Получилось, что $\overline{cddd} = 888 \rightarrow$ противоречие

Р 3) $b=8$

$$\begin{array}{r} \overline{aaa8} \\ - 229 \\ \hline cddd \end{array} \Rightarrow d=9$$

$$\begin{array}{r} \overline{aaa8} \\ - 229 \\ \hline c999 \end{array} \Rightarrow a=2$$

$$\begin{array}{r} \overline{2228} \\ - 229 \\ \hline 1999 \end{array}$$

подходит. Тогда изначально у Васи было $2228 + 229 = 2457$ р.

Р 4) $b=9$

~~$$\begin{array}{r} \overline{aaaa} \\ - 229 \\ \hline cddd \end{array} \Rightarrow d=0$$~~

$$\begin{array}{r} \overline{aaa9} \\ - 229 \\ \hline c000 \end{array} \Rightarrow a=2$$

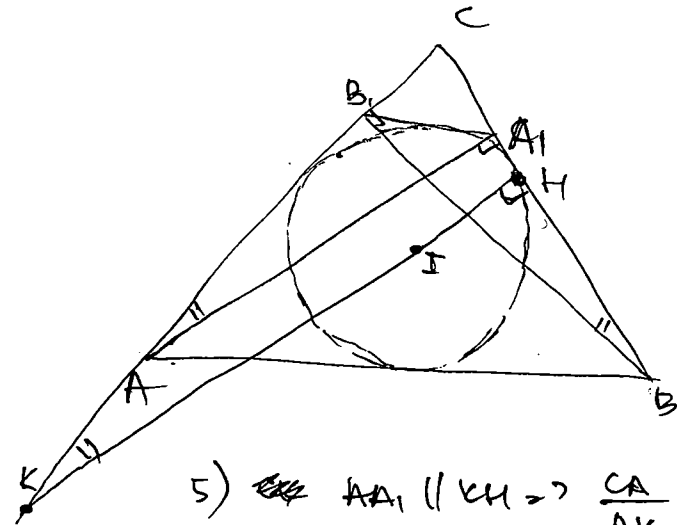
$$\begin{array}{r} \overline{229} \\ - 229 \\ \hline 2000 \end{array}$$

подходит \Rightarrow изначально было $2229 + 229 = 2458$ р.

Ответ: 2457 р. или 2458 р.

+

№5.



1. $\triangle ACA_1$ и $\triangle CBB_1$: $\angle C = \angle C$, $\angle B_1C_1C = \angle AA_1C = 90^\circ \Rightarrow \angle CAA_1 = \angle CBB_1$.
2. ~~AA₁ ⊥ BC~~, $IH \perp BC \Rightarrow AA_1 \parallel IH \Rightarrow \angle CAA_1 = \angle CKI$ как соотв.
3. AB_1A_1B - впис., т.к. $\angle B_1AA_1 = \angle B_1BA_1$ (AB - диаметр, т.к. $\angle AB_1B = 90^\circ$)
- 4) KB_1KB - впис., т.к. $\angle B_1KB = \angle B_1KB_1$ (KB - диаметр, т.к. $\angle KB_1B = 90^\circ$)

5) ~~AA₁ ∥ KH~~ $\Rightarrow \frac{CA}{AK} = \frac{CA_1}{A_1H} \Rightarrow \frac{CA}{CK} = \frac{CA_1}{CH} \Rightarrow CK = \frac{CA \cdot CH}{CA_1} \checkmark$

6) $\frac{CB_1}{CA} = \frac{CA_1}{CB}$ (т.к. AB_1A_1B - впис.)

$\frac{CB_1}{CK} = \frac{CH}{KB}$ (т.к. KB_1KB - впис.)

$$\frac{CA \cdot CA_1}{CB} = \frac{CK \cdot CH}{BH}$$

$$\frac{CA \cdot CH \cdot CA_1}{BC} = \frac{CK \cdot CH^2}{BH}$$

$$\frac{CA \cdot CH}{CA_1 \cdot BC} = \frac{CK \cdot CH^2}{CA_1^2 \cdot BH}$$

$$\frac{CK \cdot CH}{CA_1} \in BC$$

проделанный шаг