ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302756122190

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КУЗНЕЦОВ

Имя АНДРЕЙ

Отчество РОМАНОВИЧ

Дата рождения 31 05 2006

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 124

Телефон 89229990025

Дата 05 02 2024 **Подпись** Кузн

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302756122190

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	5	0	20	20	3					
Балл члена жюри №2	5	0	20	20	3					

Итоговый балл 48

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1 Неверно

$S_{1-36} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 18 \cdot 37$ - сумма чисел от 1 до 36

Пусть n - первое из 12 чисел, тогда $S_{n-(n+11)} = n + (n+1) + \ldots + (n+11) = 12n \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 66\,n$ - сумма этих 12 чисел

Если сложить суммы чисел по горизонтали и по вертикали, то каждое число будет учитываться 2 раза, т.е $2 \cdot S_{1-36} = S_{n-(n+11)}$

$2 \cdot 18 \cdot 37 = 12 \cdot 66 \cdot n$ Ŧ

$n = \frac{3 \cdot 37}{66} = \frac{37}{22}$ - не целое число, но n - должно быть целым

нельзя расставить так числа

Ответ: нельзя

№2

$a^2+b^2+c^2+2abc=1 \Rightarrow 2abc = 1-(a^2+b^2+c^2)$ $a; b; c > 0$

Док-ть:

$$\underbrace{a\underbrace{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}_{\geq 0} + b\underbrace{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}}_{\geq 0} + c\underbrace{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 2\underbrace{\sqrt{abc}}_{\geq 0}$$ $\uparrow 2$, т.к. обе части ≥ 0, знак не измен.

$$\left(a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)^2 \geq 4abc = 2\left(1-(a^2+b^2+c^2)\right)$$

$$\begin{cases}(1-b^2)(1-c^2)\geq 0\\(1-a^2)(1-c^2)\geq 0\\(1-a^2)(1-b^2)\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-b^2\geq 0\\1-a^2\geq 0\\1-c^2\geq 0\end{cases} (1) \text{ или } \begin{cases}1-b^2\leq 0\\1-a^2\leq 0\\1-c^2\leq 0\end{cases} (2)$$

$$(1)\ \begin{cases}b^2\in(0;1]\\a^2\in(0;1]\\c^2\in(0;1]\end{cases} \Rightarrow (1-a^2-b^2-c^2)\in[-2;1)$$

Если $(1-a^2-b^2-c^2)\leq 0$: нерав-во выполн., т.к.

$$\left(a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)^2 \geq 0 \geq 2(1-a^2-b^2-c^2)$$

$2abc = 1-a^2-b^2-c^2 > 0$

$$(2)\ \begin{cases}b^2\geq \cancel{0}1\\a^2\geq 1\\c^2\geq 1\end{cases} \Rightarrow 1-a^2-b^2-c^2 < 0$$ при любых a, b и c больших 1 или равных 1

Нерав-во выполняется (т.к. левая часть - квадрат и она всегда не отриц.)

Вывод: при любых полож. a, b и c нерав-во выполняется

№3

Обозначим числа как $n_1, n_2 \ldots n_6$ так как показано на рис.

2 5

n_6 n_1

n_5 n_2

n_4 n_3

$n_1 \left[\begin{array}{l} 5 \vdots (n_1-2) \\ 5 \vdots (2-n_1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_1-2=1 \\ n_1-2=5 \\ 2-n_1=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_1=3 \\ n_1=7 \\ n_1=1 \end{array}\right.$

I Рассм. $n_1 = 7$: $7 \vdots \left[\begin{array}{l} n_2-5 \\ 5-n_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_2-5=1 \text{ или } 7 \\ 5-n_2=1 \text{ или } 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_2=6 \\ n_2=4 \end{array}\right.$

$n_2 = 4$: $\left[\begin{array}{l} 4 \vdots 7-n_3 \\ 4 \vdots n_3-7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7-n_3=1 \text{ или } 2 \text{ или } 4 \\ n_3-7=1 \text{ или } 2 \text{ или } 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_3=6 \\ n_3=3 \\ n_3=8 \end{array}\right.$ (вар., когда 6 и 4 стоят рядом рассм. не будем)

$n_3 = 3$: $\left[\begin{array}{l} 3 \vdots 4-n_4 \\ 3 \vdots n_4-4 \end{array}\right. \Rightarrow n_4 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_5-3=1 \\ 3-n_5=1 \end{array}\right.$ – ни одно из чисел, которые мы не исп. не подходит ✓

$n_3 = 8$: $\left[\begin{array}{l} 8 \vdots 4-n_4 \\ 8 \vdots n_4-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_4=3 \\ n_4=6 \end{array}\right.$

$n_4 = 3$: $3 \vdots 8-n_5$ – ни одно число, которое не исп. не подх. ✓

$n_4 = 6$: $6 \vdots 8-n_5$ – ни одно не использ. число не подх.

$n_2 = 6$: $\left[\begin{array}{l} 6 \vdots 7-n_3 \\ 6 \vdots n_3-7 \end{array}\right. \Rightarrow$ $n_3 = 4$ – не рассм.; $n_3 = 1$; $n_3 = 8$

$n_3 = 1$: $\left[\begin{array}{l} 1 \vdots 6-n_3 \\ 1 \vdots n_3-6 \end{array}\right.$ – ни одно не подх. ✓

$n_3 = 8$: $\left[\begin{array}{l} 8 \vdots 6-n_3 \\ 8 \vdots n_3-6 \end{array}\right.$ $n_4 = 4 \Rightarrow$ $4 \vdots 8-n_4$ – ни одно не подх. ✓

Вариант когда $n_1 = 7$ – не подходит (если (6 и 4) – не рядом)

I $n_1 = 3$: $\left[\begin{array}{l} 3 \vdots n_2-5 \\ 3 \vdots 5-n_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_2=8 \\ n_2=6 \\ n_2=4 \end{array}\right.$

$n_2 = 8$: $\left[\begin{array}{l} 8 \vdots n_3-3 \\ 8 \vdots 3-n_3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} n_3=4 \\ n_3=1 \\ n_3=7 \end{array}\right.$

$n_3 = 4$: $4 \vdots 8-n_4$ $\left[\begin{array}{l} n_4=6 \\ n_4=7 \end{array}\right.$ – не рассм.

$n_4 = 7$: $\left[\begin{array}{l} 7 \vdots 4-n_5 \\ 7 \vdots n_5-4 \end{array}\right.$ $n_5 = 3$ не подх. $\Rightarrow$ $3 \vdots 7-n_6$ $n_6 = 6$, но $2 \not\vdots 6-5$ не подходит (нет подходящ.) ✓

$n_3 = 7$: $7 \vdots 8-n_4$ $n_4 = 1 \Rightarrow$ $1 \vdots 7-n_5$

$n_5 = 6 \Rightarrow 6 \vdots n_6-1$ – не подх. ✓ (нет подходящ.)

$n_3 = 1$: $1 \vdots 8-n_4$ $n_4 = 7 \Rightarrow$ $7 \vdots n_5 - 1$ – не подх. (нет. подходящ.) ✓

$n_2 = 6$: $\left[\begin{array}{l} 6 \vdots n_3-3 \\ 6 \vdots 3-n_3 \end{array}\right.$ $n_3 = 4$ – не рассм.; $n_3 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \vdots 6-n_4 \\ 1 \vdots n_4-6 \end{array}\right.$ $n_4 = 7$ $7 \vdots n_5-1$ $\Leftarrow n_5 = 8$; $8 \vdots 7-n_6$ – не подх. ✓

$n_2 = 4$: $\left[\begin{array}{l} 4 \vdots (n_3-3) \\ 4 \vdots 3-n_3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} n_3=7 \\ n_3=1 \end{array}\right.$

$n_3 = 7$: $\left[\begin{array}{l} 7 \vdots 4-n_4 \\ 7 \vdots n_4-4 \end{array}\right. \Rightarrow$ нет подход. ✓

Бланк ответов

$n_3 = 1: \left[\begin{array}{l} 1 \vdots 4 - n_4 \\ 1 \vdots n_4 - 4 \end{array}\right.$ – нет подх. √

Вариант, когда $n_1 = 3$ и 6 и 4 не рядом – не подх.

III $n_1 = 1: \left[\begin{array}{l} 1 \vdots n_2 - 6 \\ 1 \vdots 5 - n_2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} n_2 = 6 \\ n_2 = 4 \end{array}\right.$

$n_2 = 6: \quad 6 \vdots n_3 - 1 \quad \left[\begin{array}{l} n_3 = 7 \\ n_3 = 4 \text{ – не рол.} \\ n_3 = 3 \end{array}\right.$

$n_3 = 7: \left[\begin{array}{l} 7 \vdots n_4 - 6 \\ 7 \vdots 6 - n_4 \end{array}\right.$ – не подх. √

$n_3 = 3: \left[\begin{array}{l} 3 \vdots n_4 - 6 \\ 3 \vdots 6 - n_4 \end{array}\right. \quad n_4 = 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7 \vdots n_5 - 3 \\ 7 \vdots 3 - n_5 \end{array}\right. \Rightarrow n_5 = 4$ √

$n_6 = 8$, но $2 \not\vdots 8 - 5$ не подх.

$n_2 = 4: \quad 4 \vdots n_3 - 1 \quad n_2 = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \vdots n_3 - 4 \\ 3 \vdots 4 - n_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_3 = 7 \\ n_3 = 1 \\ \cancel{n_3 =} \end{array}\right.$

$n_3 = 7: \left[\begin{array}{l} 7 \vdots n_3 - 3 \\ 7 \vdots 3 - n_3 \end{array}\right.$ – не подх. √

$n_3 = 1: \left[\begin{array}{l} 1 \vdots n_3 - 3 \\ 1 \vdots 3 - n_3 \end{array}\right.$ – не подх. √

Все варианты, когда 6 и 4 не рядом – не подходят ⇒ 6 и 4 – стоят рядом.

Пример:

2 5

7 1

3 8 4 6

№4

Всего 64 клетки, 1 фигура бьёт не более 5 ⇒ минимально 13 фигур.

Эти мож. бьют ~~65~~ клеток

Рассм 1 из 4 углов:

x_1			
x_3	x_5		
1		x_2	
2	3	x_4	x_6

Клетки 1, 2 и 3 – бьются 3 разными фигурами

1 – из x_1; x_2 или из себя

2 – x_3; x_4 или из себя

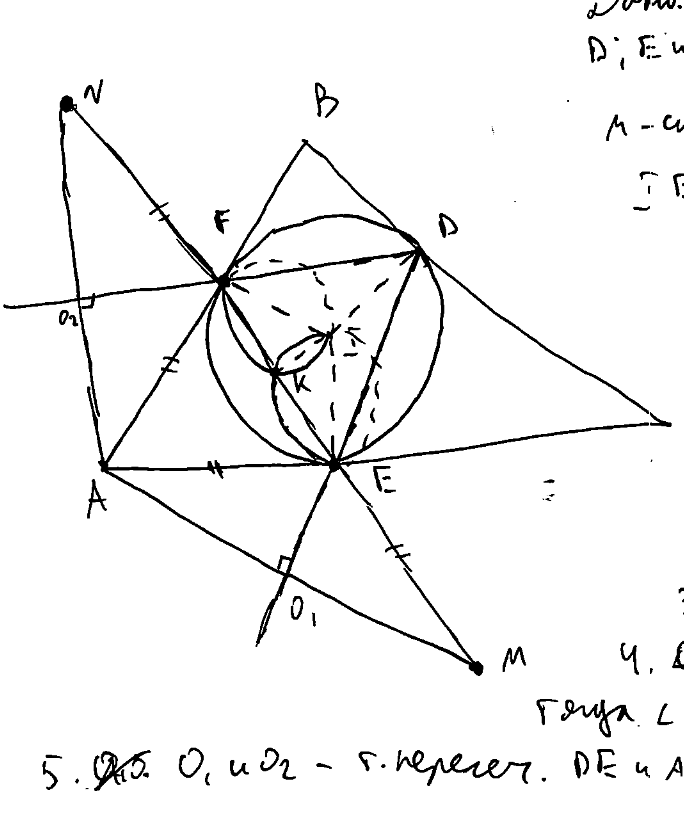
3 – x_5; x_6 или из себя

У фигуры стоящей на этой клетке минимум один ход будет выходить за поле, т.е. кол-во клеток, которые она бьют не более 4.
В 1 углу – 3 таких фигуры (для клеток 1, 2 и 3)
Всего 4 угла => 12 фигур имеют не более 4 клеток, которые бьют
12·4 = 48 кл. – макс. знач., которое бьют эти 12 фигур
64 – 48 = 16 кл – осталось, их можно закрыть минимум 4 фигурами, т.к. 1 ф. бьёт не более 5 клеток.
Получается, что минимально может быть 16 фигур. (12 + 4)
Пример:

×	×	×	×	•	•	×	×
×	×	×	×	•	•	×	×
•	•	×	×	×	×	×	×
•	•	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	•	•
×	×	×	×	×	×	•	•
×	×	•	•	×	×	×	×
×	×	•	•	×	×	×	×

Точки – фигуры
Крестики – поля, которые они бьют

№ 5



Дано: $\triangle ABC$; I – ц. впис. окр.
D; E и F – т. кас сторон BC; AC и AB
M – сим. A относ DE N – сим. A относ. DF
IE и IF – диам. окружностей, которые пересек. ещё в т. K.

Док-ть: $K \in MN$

Док-во:
1. $\angle IKE = 90°$ (т.к. впис. и опир. на диаметр IE)
2. Аналогично $\angle IK\cancel{E}F = 90°$
3. $\angle EKI + \angle IKF = 180° \Rightarrow K \in EF$ ✓
4. Обозначим $\angle EDF = \alpha$
тогда $\angle AEF = \angle AFE = \alpha$ (т.к. углы, образ. кас. и сек.)
5. ~~Пр.~~ O_1 и O_2 – т. пересеч. DE и AM; DF и AN, $DO_1 \perp AM$, $DO_2 \perp AN$ (т.к. DO_1 и DO_2 – прямые симметрии)
6. AO_2DO_1 – впис. 4х угольник (т.к. $\angle AO_2D + \angle AO_1D = 180°$)
$\angle O_1DO_2 + \angle O_1AO_2 = 180° \Rightarrow O_1AO_2 = 180 - \alpha$
7. $\angle FAE = 180 - \angle AEF - \angle AFE = 180 - 2\alpha$
8. $\angle EAO_1 = \angle O_2AF = \dfrac{O_1AO_2 - EAF}{2} = \dfrac{180 - \alpha - 180 + 2\alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ (т.к. $\triangle AEO_1 = \triangle AFO_2$)
неверно

9. $\angle O_1EA = \angle AFO_2 = 90 - FAO_2 = 90 - \frac{\alpha}{2}$ (т.к. ΔAO_1E и ΔO_2AF - р/б)

10. $AE = EM$ (т.к. M - симметр. т. A)
ΔAEM - р/б $\Rightarrow EO_1$ - мед., выс. и бис.
$\angle AEO_1 = \angle O_1EM = 90 - \frac{\alpha}{2}$

11. $\angle MEO_1 + O_1EA + AEF = 90 - \frac{\alpha}{2} + 90 - \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180°$
неверно
M, E, F - лежат на 1 пр-й

12. Аналогично N, F и E - лежат на 1 пр-й
неверно
N, F, E и M - лежат на 1 пр-й

$\left.\begin{array}{l} FE \subset NM \\ K \in FE \end{array}\right\} \Rightarrow K \in NM$