ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101692913566

Титульный лист

Направление	☒ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия К И Л Ь М Е Т О В А

Имя А Л И Н А

Отчество Б У Л А Т О В Н А

Дата рождения 1 7 0 4 2 0 0 8

Город участия П Е Р М Ь

Аудитория 1 2 4

Телефон 8 9 5 1 9 5 2 2 6 0 7

Дата 0 5 0 2 2 0 2 4 Подпись АКиль

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101692913566

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [x] 9
- [ ] 10
- [ ] 11

Город участия П Е Р М Ь

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	24	00	04						
Балл члена жюри №2	25	24	00	04						

Итоговый балл 053

Подпись члена жюри №1 Шн

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

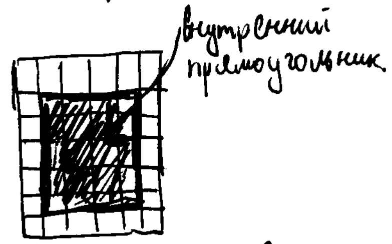
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1.

Посчитаем общую сумму чисел во всей таблице. Для этого разобьём таблицу на непересекающиеся квадраты 2×2. Один столбец будет вмещать $\frac{512}{2} = 256$ квадратов 2×2, а одна строка $\frac{2048}{2} = 1024$ квадрата 2×2. Т.к. общая сумма чисел в каждом квадрате равна 64, то общая сумма чисел в таблице $= 256 \cdot 1024 \cdot 64$.

Чтобы посчитать сумму чисел по периметру таблицы, вычтем из общей суммы чисел таблицы сумму чисел во внутреннем прямоугольнике (внутренний прямоугольник - прямоугольник, включающий в себя все клетки таблицы, кроме тех, которые лежат на периметре)

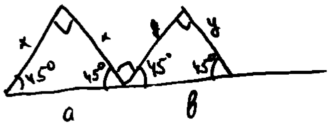


Чтобы посчитать сумму во внутреннем прямоугольнике разобьём его на непересекающиеся квадраты 2×2. В одном столбце помещается $\frac{512-2}{2} = 255$ квадратов 2×2, а в одной строке $\frac{2048-2}{2} = 1023$ квадратов 2×2. Тогда общая сумма чисел во внутреннем прямоугольнике $= 255 \cdot 1023 \cdot 64$.

Сумма чисел в клетках, находящихся по периметру картины = общая сумма - сумма во внутреннем прямоугольнике $= 256\cdot1024\cdot64 - 255\cdot1023\cdot64 = 64(256\cdot1024 - 255\cdot1023) = 64\cdot(262144 - 260865) = 64\cdot1279 = 81856$ + 258 - сумма чисел в клетках на ~~границе~~ периметре картины

Ответ: 81856 - сумма чисел

Задание 2.



Пусть основание первого $\Delta = a$, а второго $\Delta = b$. И пусть боковые стороны первого $\Delta = x$, а второго $\Delta = y$. ~~Но~~ Т.к. углы при основании первого равнобед. $\Delta = 45°$, третий угол $= 180° - 45° - 45° = 90° \Rightarrow$ ~~где~~ первый Δ - прямоуг. То же самое справедливо и для второго Δ. Т.к. Δ прямоугольные, запишем для них теорему Пифагора.

Для первого треугольника: $x^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow 2x^2 = a^2$.

Для второго треугольника: $y^2 + y^2 = b^2 \Rightarrow 2y^2 = b^2$

По условию, протяжённость поверхности гор = ~~2048~~ $4096 \Rightarrow a + b = 4096$.

~~Посчитаем~~ Площадь первой горы $= \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$. Аналогично, площадь второй горы $= \frac{y^2}{2}$. Тогда суммарная площадь гор $= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$.

Из теоремы Пифагора для I Δ: $x^2 = \frac{a^2}{2}$, для II Δ: $y^2 = \frac{b^2}{2}$.

Тогда $\frac{x^2+y^2}{2} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}}{2} = \frac{a^2+b^2}{4}$ - ~~площ~~ суммарная площадь гор. Теперь, зная, что $a + b = 4096$, нужно минимизировать $\frac{a^2+b^2}{4}$.

Покажем, что наилучший ответ достигается при $a = 2048$ и $b = 2048$.

~~Для этого, покажем, что больше 2048^2~~

Пусть мы взяли какие-то 2 числа n и m, такие, что n и m ≥ 0, n и m $\neq 2048$, и $m + n = 4096$. Докажем, что $\frac{2048^2 + 2048^2}{4} < \frac{n^2+m^2}{4}$

→ продолжение на обратной стороне листа.

Итак, чтобы доказать, что $\frac{2048^2+2048^2}{4} < \frac{n^2+m^2}{4}$, докажем, что

$\frac{n^2+m^2}{4} - \frac{2048^2+2048^2}{4} > 0$. ~~Не умаляя общности скажем, что~~

$\frac{n^2+m^2}{4} - \frac{2048^2+2048^2}{4} > 0 \quad | \cdot 4 \quad n^2+m^2-2048^2-2048^2$? Докажем, что это больше 0!

$n^2-2048^2+m^2-2048^2 = (n-2048)(n+2048)+(m-2048)(m+2048)$

~~Т.к. $n+m=2048$, то $n=$~~ Т.к. $n+m=4096$, то $n=4096-m$

(+) 24б

$(4096-m-2048)(4096-m+2048)+(m-2048)(m+2048) =$
$= (2048-m)(8144-m)+(m-2048)(m+2048) = (2048-m)(8144-m)-(2048-m)(m+2048) =$
$= (2048-m)(8144-m-m-2048) = (2048-m)(4096-2m) = (2048-m)\cdot 2(2048-m) =$
$2\cdot(2048-m)^2$. ~~Т.к. $2>0$ и/а, $m \neq 2048$~~ Т.к. $m \neq 2048$, то $(2048-m)^2>0$,
$2>0 \Rightarrow 2\cdot(2048-m)^2>0$ ~~ч.т.д.~~ $\Rightarrow$ исходное предположение верно $\Rightarrow$
минимальная площадь $= \frac{2048^2+2048^2}{4} = \frac{2\cdot 2048^2}{4} = \frac{2048^2}{2} = 2097152$.

Задача 3. *говоря "шашки" я имею в виду фишки.

Переберём количество пустых лунок и для каждого случае посчитаем кол-во способов разложить по непустым лункам шашки.
Т.к. шашек 18, то кол-во заполненных лунок ≤ 18. ~~=> кол-во пустых лунок~~ Максимальное кол-во пустых лунок достигается когда все шашки в одной лунке => ~~кол-во~~ максимальное кол-во пустых лунок равно $24-1=23$. => ~~мин~~ мин кол-во непустых $=24-23=1$

Выведем общую формулу для подсчёта кол-ва способов при n ~~пустых~~ непустых лунках.

Пусть есть ~~n лунок~~ непустых лунок и есть 18 шашек. Выберем, какие из 24 лунок сделать непустыми. Всего есть $C_{24}^n = \frac{24!}{n!(24-n)!}$ способов это сделать.
Далее положим в каждую из n выбранных лунок по одной шашке. Это будет гарантировать, что в каждой выбранной лунке лежат хотя бы 1 шашка.
Теперь разложим оставшиеся шашки по выбранным лункам. ~~Каждую шашку можно положить в любую из n лунок => кол-во способов разложить оставшиеся шашки по выбранным лункам~~ $= A_{18-n}^n = (18-n)^n$

~~Тогда итоговая формула для n непустых лунок имеет следующий вид:~~
~~$C_{24}^n \cdot A_{18-n}^n = \frac{24!}{n!(24-n)!}\cdot(18-n)^n$~~

(—)

~~Далее переберём n от 1 до 18, подставим в формулу и посчитаем сумму~~

~~$n=1$: $\frac{24!}{23!\cdot 1!}\cdot(18-1)^1 = 24\cdot 17$~~ ~~$n=3$: $\frac{24!}{21!\cdot 3!}\cdot(18-3)^3 = 22\cdot 23\cdot 4\cdot 15^3$~~

~~$n=2$: $\frac{24!}{22!\cdot 2!}\cdot(18-2)^2 = 23\cdot 12\cdot 16^2$~~ ~~$n=4$: $\frac{24!}{20!\cdot 4!}\cdot(18-4)^4 = 21\cdot 22\cdot 23\cdot 14^4$~~

Задание 3

$n=5$: $\frac{24!}{5!\cdot 19!}\cdot(18-5)^5 = 21\cdot 22\cdot 23\cdot 4\cdot 13^5$

$n=6$: $\frac{24!}{6!\cdot 18!}\cdot(18-6)^6 = 19\cdot 7\cdot 22\cdot 23\cdot 12^6$

$n=7$: $\frac{24!}{7!\cdot 17!}\cdot(18-7)^7 = 18\cdot 19\cdot 22\cdot 23\cdot 11^7$

$n=8$: $\frac{24!}{8!\cdot 16!}\cdot(18-8)^8 = 17\cdot 9\cdot 19\cdot 11\cdot 23\cdot 10^8$

$n=9$:

$n=10$:

$n=11$:

$n=12$:

$n=13$:

$n=14$:

$n=15$:

$n=16$:

$n=17$:

$n=18$:

Ответ является ~~слиш~~ слишком большим, чтобы посчитать его за время олимпиады. Если писать решение этой задачи ~~на~~ компьютере то нужно посчитать!

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n\le 18}\frac{24!}{n!(24-n)!}\cdot(18-n)^n}$$

Задание 4.

1) 101 - простое число => его делители = 101 и 1. НОД(101, 1) = 1 => пара 101 и 1, а также пара 1 и 101 являются хорошими => число 101 имеет красоту 2.

(+) 1б

Задание 3 (продолжение)

Нужно разместить 18-n шашек по n лункам. Для этого 18-n шашек надо как-то разбить на n групп (возможно, с нулевым кол-вом шашек), а это эквивалентно задаче, где имеется 18-n шаров и нужно разместить между ними n перегородок. ~~Тогда~~ Способов это сделать: C_{18-n}^{n-1}, а способов разместить группы шашек по лункам: $P(n)=n!$ Тогда, итоговая формула размещения 18 шашек по n непустым лункам имеет следующий вид: $C_{24}^{n}\cdot C_{18-n}^{n-1}\cdot P(n) = \frac{24!\cdot(18-n)!\cdot\cancel{n!}}{n!\cdot(24-n)!\cdot\cancel{n!}\cdot(18-2n)!} = \frac{24!\cdot(18-n)!}{n!(24-n)!(18-2n)!}$ ~~Т~~ Ответ является слишком большим, чтобы считать его вручную во время олимпиады. Если писать решение данной задачи на компьютере, то нужно посчитать:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n\le 18} C_{24}^{n} \cdot C_{18-n}^{n-1} \cdot P(n)}$$

хотелось бы без суммы формулу

Задание 4 (продолжение)

2) Максимизируем число подходящих под условие пар. Для этого у
чисел a и в должен быть разный набор простых множителей.
Покажем, что в ~~числе X~~ наилучшем числе X ~~каждый~~ (или одном
из наилучших) каждый простой множитель встречается не более 1
раза: Пусть какое то простое число p встречается в числе X α раз.
Тогда представим X как $K \cdot p^{\alpha}$: Поймём, какие пары a и в дадут
вклад в ответ: $a = y_1 \cdot p^{0}$ и $в = y_2 \cdot p^{\alpha}$, при этом $y_1 \cdot y_2 = K$.
Все такие пары дадут вклад в ответ. ~~Аналогично~~ в, а также
все пары $a = y_1 \cdot p^{\alpha}$ и $в = y_2 \cdot p^{0}$. Если же и в a, и в в p будет не
в нулевой степени, то НОД(a, в) $\vdots$ p => $\neq 1$ и такая пара не даст
вклад в ответ. ~~Т.е. если число p (простое) входит в X более~~
~~одного~~. Тогда, ответом будет кол-во пар y_1 и $y_2 \cdot 2$.
Теперь рассмотрим $X_1 = K \cdot p^1$. Вклад в ответ дадут все те же
пары, просто в соответствующем числе заменим p^{α} на p^1.
Т.е. если число p (простое) входит в X более одного раза, дублирование
степени не даёт улучшения ответа. Составим максимальное
возможное число ≤ 1024 такое, что оно состоит только из
простых множителей, входящих в X в первой степени:
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 210$. При умножении $210 \cdot 11$ получим число > 1024,

а т.к. 2, 3, 5 и 7 – первые 4 послед. натуральных простых числа, больше 4 простых множителей в числе X быть не может.

Посчитаем ответ для $X = 210$:

a	b
1	210
2	105
3	70
5	42
6	35
7	30
10	21
14	15
15	14
21	10
30	7
35	6
42	5
70	3
105	2
210	1

~~От~~ Просто переберём все делители числа 210. Т.к. все простые множители входят в X только 1 раз, любая пара чисел a и b, такая что $a \cdot b = 210$ даёт вклад в ответ.

~~Кол-во~~ $210 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

Ответ $= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1) =$

$= (1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2^4 = 16$

Ответ: 16