

Титульный лист

Направление информатика история математика
 обществознание русский язык физика
 химия

Класс 8 9 10 11

Фамилия ДИМИТРИЕВА

Имя МАРИЯ

Отчество ВЛАДИМИРОВНА

Дата рождения 10 01 2008

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Аудитория 205

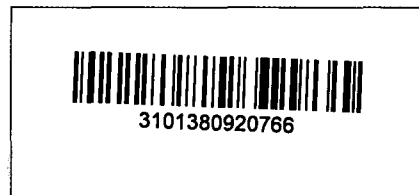
Телефон 89278401230

Дата 05 02 2024

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист
Заполняется участниками

Направление информатика история математика
 обществознание русский язык физика
 химия

Класс 8 9 10 11

Город участия Ч Е Б О К С А Р Ы

Заполняется организаторами

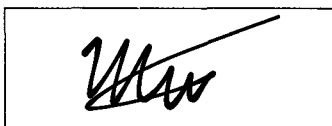
Количество доп. листов **Количество черновиков к проверке**
Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

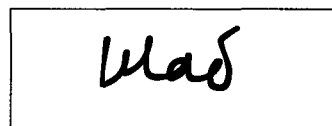
Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	03	15	17						
Балл члена жюри №2	00	03	15	17						

Итоговый балл 035

Подпись члена жюри №1



Подпись члена жюри №2



Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Бланк ответов

1 ВАРИАНТ.

1) $F(7, 7) - ?$

$$F(7, 7) = \sum_{i=1}^n \gcd(i, i+k)$$

В данном случае $k=7$ — простое число, т.е. имеет делители только 1 и 7.

Рассмотрим число $i+k$: $i:i$, т.к. $i=i \Rightarrow$

$\Rightarrow i+k$ будет кратно i только при k кратно i .

Тогда $\gcd(i, i+7)$ будет равно 1 при всех $i \neq 7$. — 6 вариантов i .

$\gcd(i, i+7)$ будет равно 7 при $i=7$.

Тогда $F(7, 7) = 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 6 + 7 = 13.$

Ответ: 13.

+ 18

2) $F(1024, 1024) - ?$

$1024 = 2^{10}$, поэтому 1024 кратно только 1 и степеням двойки до десятой включительно

$\gcd(i, i+1024) = 1$ при всех i , не кратных 2, т.е. при всех нечетных i . **почему!**

Кол-во нечетных чисел от 1 до 1024 равно $\frac{1024}{2} = 512$.

Далее рассмотрим кол-во чисел от 1 до 1024, кратных каждой степеней двойки от 1 до 10.

Степень двойки, делитель на k или проверка (i)	Кол-во чисел, кратных этой степени (от 1 до 1024)	Кол-во чисел, кратных этой степени, но не кратных следующей степени двойки
1024	$\frac{1024}{1024} = 1$	1 (т.к. рассм. степени до 10)
512	$\frac{1024}{512} = 2$, из них 1 кратно 1024	$2 - 1 = 1$
256	$\frac{1024}{256} = 4$, из них 2 кратно 512	$4 - 2 = 2$
128	$\frac{1024}{128} = 8$, из них 4 кратно 256	$8 - 4 = 4$
64	$\frac{1024}{64} = 16$, из них 8 кратно 128	$16 - 8 = 8$
32	$\frac{1024}{32} = 32$, из них 16 кратно 64	$32 - 16 = 16$
16	$\frac{1024}{16} = 64$, из них 32 кратно 32	$64 - 32 = 32$
8	$\frac{1024}{8} = 128$, из них 64 кратно 16	$128 - 64 = 64$
4	$\frac{1024}{4} = 256$, из них 128 кратно 8	$256 - 128 = 128$
2	$\frac{1024}{2} = 512$, из них 256 кратно 4	$512 - 256 = 256$

Продолжение на следующей странице.

(14) (продолжение)

165

(+)

Тогда образом, $\gcd(i, i+1024) = 1024$ где $\frac{1}{1024} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 512$ где $\frac{1}{512} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 256$ где $\frac{1}{256} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 128$ где $\frac{1}{128} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 64$ где $\frac{1}{64} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 32$ где $\frac{1}{32} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 16$ где $\frac{1}{16} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 8$ где $\frac{1}{8} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 4$ где $\frac{1}{4} i$
 $\gcd(i, i+1024) = 2$ где $\frac{1}{2} i$

Тогда сумма $\gcd(i, i+1024)$ где всех четных i будет
 равна $1024 \cdot 1 + 512 \cdot 1 + 256 \cdot 2 + 128 \cdot 4 + 64 \cdot 8 + 32 \cdot 16 + 16 \cdot 32 +$
 $+ 8 \cdot 64 + 4 \cdot 128 + 2 \cdot 256 = 512 \cdot 11 = 5632$

Сумма $\gcd(i, i+1024)$ где всех нечетных i будет
 равна $512 \cdot 1 = 512$.

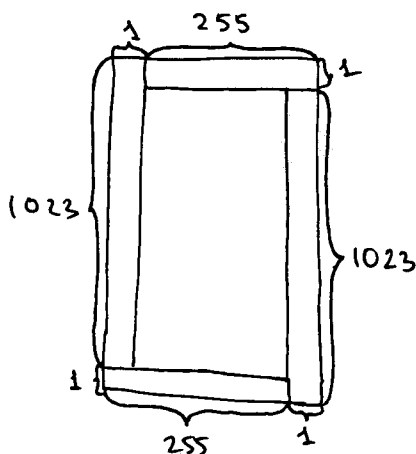
Тогда $F(1024; 1024) = 5632 + 512 = 512 \cdot 12 = \underline{6144}$.

Ответ: 6144.

(12) 1) $n = 256$

$m = 1024$

Назовем клетки, находящиеся по периметру картины, рамкой.
 Тогда рассмотрим рамку 256×1024 :



Разобьем рамку на 4 прямоугольника.

Тогда каждая прямоугольнике 255×1 состоит
 из $255:3 = 85$ полос размером 1×3 .

То сумма чисел на каждой полосе 1×3
 равна 32, то сумма чисел на прямоуголь-
 нике 255×1 будет равна $85 \times 32 = 2720$.

Каждый прямоугольнике 1×1023 состоит из
 $1023:3 = 341$ полос размером 3×1 .

Сумма чисел на каждой полосе 3×1 равна
 32, поэтому сумма чисел на каждой
 прямоугольнике будет равна $341 \times 32 = 10912$.

Тогда сумма чисел на всей рамке будет равна

$$2720 \cdot 2 + 10912 \cdot 2 = 13632 \cdot 2 = 27264.$$

Ответ: 27264.

135

Бланк ответов

12 (продолжение)

2) Рассмотрим квадрат 6×6 .

a	b	c	a	b	c
d	f	h	d	f	h
e	g	i	e	g	i
a	b	c	a	b	c
d	f	h	d	f	h
e	g	i	e	g	i

Пусть в первой строке первые 3 числа равны a, b, c . Тогда $a+b+c=32$.

При движении вправо получаем, что в 4-й элемент первой строки будет записано число a , так необходимо, чтобы $b+c$ + четвертый элемент был равно 32, что возможно только ~~тогда~~ в случае, когда число в четвертой элемент равно a . Аналогично в 5-й элемент число b , а в 6-й c .

Тем же образом

тогда получим, что картина будет состоять из квадратов

a	b	c
d	f	h
e	g	i

и их частей.

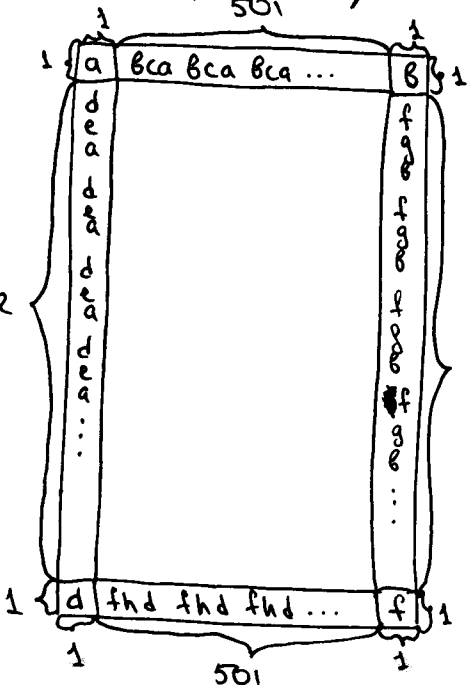
заполним квадрат числами $a, b, c, d, e, f, g, h, i$.

По условию, сумма чисел в каждой строке и каждой колонке этого квадрата должна быть равна 32. Тогда:

$$a+b+c = d+f+h = e+g+i = a+d+e = b+f+g = c+h+i = 32. \text{ Отсюда:}$$

$$\begin{aligned} b+c &= d+e & f+h &= a+e & e+g &= c+h \\ a+c &= f+g & d+h &= b+g & g+i &= a+d \\ a+b &= h+i & d+f &= c+i & e+i &= b+f \end{aligned}$$

Далее рассмотрим рамку 503×2024 :



Разобьем ее на 4 квадрата 1×1 по углам и 4 прямоугольника:

- 2 прямоугольника 1×501 и
- 2 прямоугольника 2022×1 .

Тога каждой прямоугольнике 1×501 состоит из 501: 3 = 167 полосок 1×3 .

Каждой прямоугольнике 2022×1 состоит из $2022:3 = 674$ полосок 3×1 .

То сумма чисел на каждой полоске 1×3 и 3×1 равна 32, то сумма чисел на всех прямоугольниках:

$$(167 + 674) \cdot 2 \cdot 32 = 53824$$

Продолжение на след. странице.

12) (продолжение)

Далее рассмотрим угловое квадрат 1×1 .

Пусть в верхнем левом квадрате стоит число a .

Тогда верхний прямоугольник состоит из трех чисел ~~всех~~ a , поэтому в верхнем правом квадрате будет стоять число b .

Левый прямоугольник состоит из трех чисел d и a , поэтому в левом нижнем квадрате будет стоять число d .

Нижний прямоугольник состоит из трех чисел f и d , поэтому в правом нижнем углу будет стоять число f .

Тогда сумма чисел во всех квадратах равна

$$a + b + d + f$$

Но по доказанному ранее $d + f = c + i \Rightarrow$

$$\Rightarrow a + b + d + f = \underbrace{a + b + c}_{32} + i$$

$$\textcircled{\pm} 158$$

Тогда пусть квадрат с цифрой i вырезан.

Тогда сумма чисел на остальных 3 квадратах будет равна 32.

Тем же образом, сумма чисел во всей рамке с 1 вырезанным угловым будет равна $53824 + 32 = 53856$.

Ответ: 53856.

11) Значение a хоть и минимально, когда длины 1 двоичных записей чисел a и b равны, ~~и больше~~. Все числа в двоичных записях этих чисел, кроме последней, совпадают, а последней цифра большего числа равна 1 , а меньшего — 0 . В таком случае a и b — последовательные числа, поэтому их $\gcd(a, b) = 1$, а $\text{axorb} = 1$. Только такие числа нам не подходят.

Продолжение на след. странице.

л 1 (продолжение)

Максимальная десятичная сумма двух чисел \checkmark в двоичной записи равна 11 ^{a b}

$\underbrace{\hspace{10em}}_{10 \text{ цифр}} 0$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{10 \text{ цифр.}} 1$

На месте каждой цифры может стоять 1 или 0 — варианты. т.е. таких чисел будет 2^{10} .

Всего пар чисел a, b будет $\frac{2048 \cdot 2047}{2}$.

— Таких образом, пар чисел, для которых выполняется неравенство $\gcd(a, b) < a \cdot b$, будет:

$$\frac{2048 \cdot 2047}{2} - 2^{10} = 1024 \cdot 2047 - 1024 =$$

$$= 1024 \cdot 2046 = 2095104$$

Ответ: 2095104.

