ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101051333325

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КАЛИНИНА

Имя ДАРЬЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 18 02 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 611

Телефон 89193781915

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101051333325

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	5	–					
Балл члена жюри №2	20	0	0	5	–					

Итоговый балл 25

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

сумма 1 стороны кв $= S_{кв} = \frac{(1+36)36}{2} = 37 \cdot 18 = 666 \Rightarrow$

сумма 2 сторон кв $= 1332$

представим сумму как ~~послед.~~ арифмет. арифмет прогрес из 12 чисел $+ n$

$1332 = \cancel{\frac{(1+x)12}{2}+n} = \frac{(x+(x+12))12}{2} + n$

$1332 = (2x+12)6 + n$, причем $x; n \in N$

миним. сумма для $n; x = 1+2+3+4+5+6 = 21$

максим сумма для $n; x = 36+35+34+33+32+31 = 201$

$21 \le n \le 201$

т к $(2x+12) \in N \to 1332 - n \vdots 6$;

$1332 \vdots 6$ $\left(\frac{1332}{6} = 222\right) \to n \vdots 6$. Пусть $z = \frac{n}{6}$; $z \in N$

$222 = (2x+12) + z$

Аналогично $(x+6) \in N \to 222 - z \vdots 2$; $222 \vdots 2$ $\left(\frac{222}{2} = 111\right) \to$

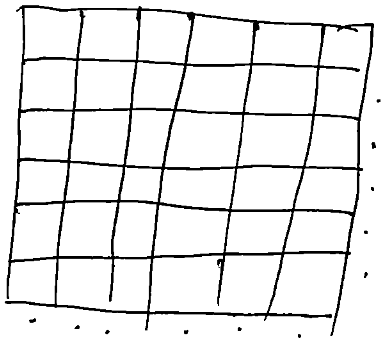
$z \vdots 2$ $(n \vdots 12)$. Пусть $t = \frac{n}{12}$

$111 = (x+6) + t$

$105 = x + t$; т к $x \in N \to 105 - t > 0$; т к $21 \le x \le 201 \to$

$105 - t \ge 21$,

№1



сумма 1 стороны кв = $S = \frac{(1+36)36}{2} = 37\cdot 18 = 666$

→ сумма 2 сторон = $666\cdot 2 = 1332$

представим 1332 как арифметич прогрессию из 12 чисел

$S = \frac{(x+(x+11))12}{2}$; $x \in N$

$(2x+11)6 = 1332$

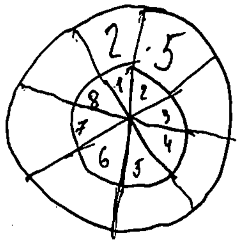
~~$(x+6) = \frac{1332}{12} = 111$~~ $2x+11 = 222$

~~$x = 40{,}5$~~

$2x = 222-11 = 211$

Это невозможно, т к $x \in N$ → нельзя

№3



Опираясь на рисунок, будем считать, что числа во внутр. кругу – номера „клеток"

По условию клетка 1 = 2 и клетка 2 = 5

Так как круг в любом случае будет симметричен смысла рассматривать к1 = 5 и к2 = 2 – нет.

5 ⋮ 1 и 5. т к 8 – макс число → к3 − 2 = 1 или 5 →

• к3 = 7 или 3 или 1

т к 7 ⋮ 7; 1 и 3 ⋮ 1; 3; чтобы к3 = 7 → к4 = 6 или 4

(8 – макс число; 8 − 5 = 3 – макс разн для к3)

3 ⋮ 1; 3, но чтобы разн к2 и к4 = 3 → к4 = 2, а 2 уже имеется в к1 → разн к2 и к4 = 1 → к4 = 6 или 4

2 ⋮ 2; 1 → разн к2 и к8 = 2 или 1 → к8 = 6 или 4 или 7 или 3

разн к8 и к2 = 2 или 1

разн к4 и к2 = 1

разн к1 и к3 = 1 или 5

Бланк ответов

Рассмотрим несколько случаев

1) к 3 = 3 и к 4 = 4

разн: 1; 2; 4

к 5 = 1; 7 → к 5 = 7 – невозможно, т.к. разн к 6 и к 4 = 1 или 7 √

7 - невозможно т.к. макс разн для к 5 = 8 - 4 = 4, а 1 невозможна т.к.
4 - 1 = 3 (занято) 4 + 1 = 5 (занято) → невозможно √

2) к 3 = 7 и к 4 = 4

разн: 1; 2; 4

к 5 = 6; 8; 3 → к 5 = 3 - невозможно, т.к. если к 5 = 3 → разн к 4 и к 6 = 3 и 1 →
к 6 = 2 (нет); 5 (нет); 7 (нет) (занято) 1 → разн к 5 и к 7 = 1 →
к 7 = 2 (нет); 4 (нет) – невозможно √

Аналогично к 5 = 8 → к 6 = 3 или 6; но 3 невозможна т.к. разн к 5 и к 7
= 1, а 4 и 7 - заняты, а 6 невозможна, т.к. при к 5 = 8 и к 6 = 6 → к 7 = √
7 (занято), 6 (занято), 2 (занято), 5 (занято) → к 5 = 8 – невозможно

3) к 3 = 1 к 4 = 4

разн: 1; 2; 5;

к 5 = 3 → к 5 = 3 - невозможно т.к. если к 5 = 3 → к 6 = 2 (нет); 4 (нет); 1 (нет)
5 (нет); 7; при к 6 = 7 → разн к 7 и к 5 = 1 → к 7 = 2 (занято) →
к 5 = 3 невозможно √

4) к 3 = 7 и к 4 = 6

разн: 1, 2, 3, 6

к 5 = 8 4 1 → к 5 = 8 - невозможно т.к. если к 5 = 8 → к 6 = 5 (нет), 7 (нет),
2 (нет); 4; при к 6 = 4, к 7 = 6 (нет); 4 (нет); 7 (нет) → к 5 = 8 - невозмож √
к 5 = 1 - невозможно т.к. при к 4 = 6 и к 5 = 1 → к 4 = 5 (нет); 7 (нет) (занят)
→ невозможно √

5) к 3 = 3 к 4 = 6

разн: 1, 2, 3, 5

к 5 = 4, 1 → к 5 = 1 - невозможно т.к. при к 4 = 6 и к 5 = 1 → к 6 = 5 (нет); 7
при к 6 = 7 и к 5 = 1 → к 7 = 6 (нет); 8; → при к 7 = 8 остается к 8 = 4, но
7 - 4 ≠ 8 → к 5 = 1 - невозможно √

6) к 3 = 1 к 4 = 6

разн: 5 где к 5 = 3 ?

к 5 = 7 – невозможно, т.к. при к 5 = 7 → к 6 = 6 (нет); 8 → при к 6 = 8

→ к7 = 3; 8 (нет); 1 (нет); 5 (нет) и т.д → к8 = 4 остается, но
8 − 4 ⋮ 3 → к5 = 7 невозможно √

нет случая

к3 = 3
К4 = 8

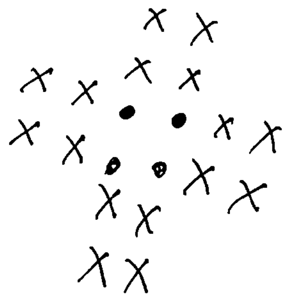
исходя из 1; 2; 3 случаев, при к4 = 4 → к5 = 6
исходя из 4; 5; 6 случаев, при к 4 = 6 → к5 = 4

ЧТД

№ 4

так как оборотень бьет через одного → необходимо рассматривать фигуру, когда оборотни наход рядом. так как фигуры бьют через одного, оптимальная по бою и защите фигура: где • - оборотни, а X - клетки под боем

не обосновано



Оценка: всего клеток 8 · 8 = 64 → мин число оборотней $\frac{64}{5}$ (т.к оборотень бьет клетки 4 и занимает 1) = 13 - мин

однако, т.к оборотни бьют через одного, а строка или столбец = 8 клеток → в одной строке / столбце оптимально (рядом друг с другом) могут находиться 2 оборотня (иначе столбец / клетка ост пустыми)

не доказано

2 · 8 = 16

X	X	X	X	•	•	X	X
X	X	X	X	•	•	X	X
•	•	X	X	X	X	X	X
•	•	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	•	•
X	X	X	X	X	X	•	•
X	X	•	•	X	X	X	X
X	X	•	•	X	X	X	X

Доп: т.к оптимальная фигура включ 4 оборотня → кол-во оборотней (n) в квадрате ⋮ 4

$$\left.\begin{array}{l} n \,\vdots\, 4 \\ n \geq 13 \\ n - \text{мин} \end{array}\right\} n = 16$$

пример

+

№2

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$ т.к. $a;b;c>0 \Rightarrow a,b,c<1$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq 2\sqrt{abc}$

По нер-ву Коши.

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq 3\sqrt[3]{abc\,(1-b^2)(1-c^2)(1-a^2)}$

ОДЗ: $abc>0$

$3\sqrt[3]{abc\,(1-a^2-b^2-c^2+(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2-(abc)^2}-2\sqrt{abc}\geq 0$

$3\sqrt[3]{abc\,(2abc+(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2-(abc)^2}-2\sqrt{abc}\geq 0$

$3\sqrt[3]{2(abc)^2+(a^3b^3c+b^3c^3a+a^3c^3b-(abc)^3}-2\sqrt{abc}\geq 0$

$3\sqrt[3]{2(abc)^2+(a^3b^3(c-c^3)+c^3(b^3a+a^3b)}-2\sqrt{abc}\geq 0$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}\geq 2\sqrt{ab(1-b^2)(1-a^2)}\cdot(1-c^2)$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}\geq 2\sqrt{(ab-ab^3)(1-a^2)}\cdot(1-c^2)$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}\geq 2\sqrt{ab-a^3b+a^3b^3-ab^3}\,(1-c^2)$

Аналогично: ~~$b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}\geq 2\sqrt{\ }$~~

$b\sqrt{(1-c^2)(1+a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq 2\sqrt{bc-b^3c+b^3c^3-bc^3}\,(1-a^2)$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\geq 2\sqrt{ac-a^3c+a^3c^3-ac^3}\,(1-b^2)$

$2\sqrt{ab-a^3b+a^3b^3-ab^3}\cdot(1-c^2)+2\sqrt{bc-b^3c+b^3c^3-bc^3}\,(1-a^2)\geq 2\sqrt{abc}+2\sqrt{ac-a^3c+a^3c^3-ac^3}\,(1-b^2)$

~~$(ab-a^3b+a^3b^3-ab^3)(1-c^2)$~~

$\frac{(a+b+c)^3(1-c^2)}{(1-c)}+\frac{(a+b+c)^3(1-a^2)}{(1-a)}\geq 2\sqrt{abc}+\frac{(a+b+c)^3(1-b^2)}{(1-b)}$

$(a+b+c)^3(1+c)+(a+b+c)^3(1+a)\geq(a+b+c)^3(1+b)+\sqrt{abc}$

$(a+b+c)^3(1+c+\cancel{1}+a-\cancel{1}-b)\geq\sqrt{abc}$

$(a+b+c)^3\geq\sqrt{abc}$ $(a+b+c<1)$

$(a+b+c)^2(a+b+c+a+c-b) \geq \sqrt{abc}$

$(a+b+c)^2 \cdot 2(a+c) \geq \sqrt{abc}$ т.к $a; b; c < 1 \Rightarrow$

$(a+b+c)^2 \geq \sqrt{abc}$

$2(a+c) \geq \sqrt{abc}$

продвижений нет