ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101401433340

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Фамилия КОЛМАКОВ

Имя АЛЕКСЕЙ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 01 08 2007

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория С III

Телефон 89120489662

Дата 05 02 2024 **Подпись** Колмаков

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101401433340

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 13:45 до 13:47

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	–	5	–					
Балл члена жюри №2	20	0	–	5	–					

Итоговый балл 25

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание №1

Условие задачи:

• Можно ли в клетках квадрата 6×6 расставить числа от 1 до 36 (кажд. по одному разу), так, чтобы 6 сумм. по гориз. и 6 сумм. по вертикали в некотором порядке являлись 12 последовательными числами?

$\boxed{\text{Ответ: Нет, нельзя}}$

• $\boxed{\text{Док-во}}$: 1)• Рассмотрим сумму всех чисел от 1 до 36 → Арифм. прогрессия ($a_1 = 1$; $a_{36} = 36$)

$n = 36$

$$S_{36} = \frac{a_1 + a_{36}}{2} \cdot n = \frac{37}{2} \cdot 36 = 666$$

2) Когда идёт подсчёт суммы столбцов по вертикали и горизонтали, то каждое число от 1 до 36 используется два раза

↓

Общая сумма 6 гориз. и 6 верт. столбцов $= 2 S_{36} = 2 \cdot 666 = 1332$

3) • ~~1.~~ Пусть из 12 последовательных чисел первое равно $- n \to n_1 + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) + (n+7) + (n+8) + (n+9) + (n+10) + (n+11)$ — Сумма последовательных 12 чисел

(Продолжение задание №4)

• Тогда $12n + \overbrace{1+2}^{3}+\overbrace{3+4}^{7}+\overbrace{5+6}^{11}+\overbrace{7+8}^{15}+\overbrace{9+10+11}^{30}$ –

– сумма 12 послед. чисел (из 3)

$\downarrow$

$12n + 66$

4) Приравняем сумму 12 послед. чисел к сумме чисел, которая была использована при подсчёте в верт. и в горизонт. рядов (2 из 3 пункта)

$\downarrow$

$12n+66 = 1332$

$12n = 1266 \rightarrow n = \dfrac{1266}{12} = 100+5+0,5$

$= 105,5$

• А $n = 105,5$ невозможен т-к все числа от 1 до 36, которые были использованы → целые

$\Downarrow$

Нельзя расставить числа от 1 до 36 для выполнение условий задачи

ЧТД.

+

Бланк ответов

Задача №4

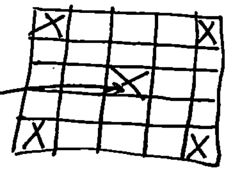
Дано: • Клетчатая доска 8×8

• Фигура вампир, которая (В)

бьёт клетку там, где 1) Стоит 2) По диагонали
(закрашивает)

[слева → сверху и → снизу
[справа → сверху и → снизу
↓
т.е

* т.е в сумме он закрашивает 5 клеток (В)

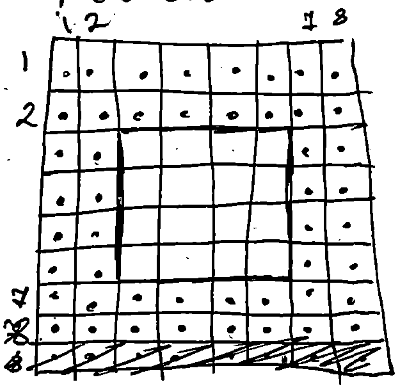


X – клетка закрашена

Найти: Наименьшее кол-во В, чтобы полностью закрасить клетчатую доску 8×8

Решение: • ~~Учтём~~ 1) Учтём, что кол-во В минимально – утопично может составлять – 13(В) (т.к клеток всего 8×8 = 64 → $\frac{64}{5}$ ≈ 12,8 ↙ окр. в большую сторону ↓ 13

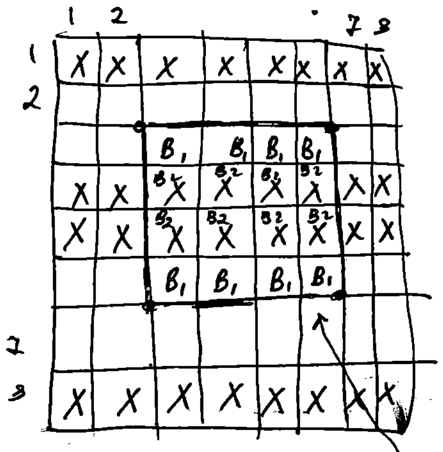
2 1)



(В) ∈ [13; +∞)

• Для того, чтобы найти min кол-во (В) учтём то, что 1 и 2, и 7 и 8 столбцы по вертикали и горизонтали не эффективны → т.к (В) в этих точках ~~не доказано~~ закрывают от 2 до 3 точек (• на рисунке означают, что туда невыгодно ставить вампиров)
↓
Теперь осталась зона 4×4, в которой выгоднее всего расставлять вампиров (В)
↑ наиболее эффективно

2)



пример

• Начнём с того, что расставим 8 вампиров, пусть будут — B_1

↓

Они в сумме закрасят 40 клеток (т.е будут максимально эффективны)

• Потом расставим 8 вампиров, пусть будут B_2 → На оставшихся местах в квадрате 4×4

↓

В сумме они в 8 закроют оставшиеся 24 клетки (Их эффективность, хоть и снизилась до 3, вместо 5, но в данной ситуации была максимальной)

↓

Т.е когда были расставлены 8 B_1 → Max эфф. B_2 снизилась до 3 клет/B_2

↓

И при этом эфф., если бы вампиры были расставлены в 1, 2 и 7, 8 столбцах по ~~диагон~~ вертикали и горизонтали снижена до 1 или 0 клеток/В

⇓

За 16 В ($8B_1 + 8B_2$) можно закрасить всю клетчатую доску 8×8

⇓

• И при этом значений (В) меньше не будет (т.е 13, 14 или 15 для закрашивания всей доски) т.к в квадрате 4×4 можно было бы любым способом расставить вампиров и при этом у половины будет эфф = 5 клет/В, а у другой половины 3 клет/В

Бланк ответов

• Тогда их средняя эффективность — 4 клет/В

↓

16 (В) · 4 = 64 (как раз столько, сколько и нужно закрасить), а бо́льшую эфф. нельзя было получить (опираясь на пункт 2)

↓

$\boxed{\text{Ответ}}$: Наим. кол-во вампиров — $\boxed{16}$

Задание №2

Дано: • Вася расставил в ряд 2023 действительных числа $a_1, a_2 \dots a_{2023}$ (именно в этом порядке)

↓

Оказалось: $a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1$

• Док-ть, что существует $1 \leq i \leq 2022$ и i такой, что $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$

• Док-во: 1) Рассмотрим систему

$$(++)\ \begin{cases} a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1 \\ a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1 \end{cases}$$

Но ведь это не дано

$$\rightarrow \begin{cases} a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1 \\ 2a_{i+1} - 1 \leq a_i^2 \end{cases}$$

• Сложим системы $\rightarrow a_{2023}^2 + 2a_{i+1} \cancel{-1} \leq 2a_1 \cancel{-1} + a_i^2$

$a_{2023}^2 + 2a_{i+1} \leq 2a_1 + a_i^2$

$\boxed{a_{2023}^2 - 2a_1 \leq a_i^2 - 2a_{i+1}}$

(Продолжение задачи №2)

2) Из 1

$$a_{2023}^2 - 2a_1 \le a_i^2 - 2a_{i+1} \; \Big| +1$$

$$* \quad \boxed{a_{2023}^2 - 2a_1 + 1} \le a_i^2 - 2a_{i+1} + 1$$

• И при этом

$$a_{2023}^2 \le 2a_1 - 1$$

$$\downarrow$$

$$+ \quad \boxed{a_{2023}^2 - 2a_1 + 1 \le 0}$$

$$\Downarrow$$

Из $*, +$

• $a_i^2 - 2a_{i+1} + 1 \ge$ • чем значение $a_{2023}^2 - 2a_1 + 1 \in (-\infty; 0]$

• А также по усл задачи $a_i^2 \ge 2a_{i+1} - 1$

$$\downarrow$$

$$\boxed{a_i^2 - 2a_{i+1} + 1 \ge 0} \quad **$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_i^2 - 2a_{i+1} + 1 \ge a_{2023}^2 - 2a_1 + 1 \\ a_i^2 - 2a_{i+1} + 1 \ge 0 \\ a_{2023}^2 - 2a_1 + 1 \le 0 \end{cases} \quad (\text{Из } +, **)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{a_i^2 - 2a_{i+1} + 1 = 0} \; - \text{единственное}$$

$***$

решение системы

$\downarrow$

Ответ: • Т.к решение системы (++) существует, и её значение зависит от $i \rightarrow 1 \le i \le 2022$ также существует. Т.к a_i и a_{i+1} из $(***)$ попадают $\rightarrow$ под ряд 2023 действительных чисел из условия $(a_1, a_2, \ldots, a_{2023})$ ч.т.д