ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101308296922

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Фамилия ГИЛЬМУНДИНОВ

Имя ВИТАЛИЙ

Отчество ВАДИМОВИЧ

Дата рождения 02 12 2007

Город участия НОВОСИБИРСК

Аудитория

Телефон 89538815391

Дата 05 02 2024 **Подпись** Um

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101308296922

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия НОВОСИБИРСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 15:45 до 15:47

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	20	–					
Балл члена жюри №2	20	20	20	20	–					

Итоговый балл 80

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1.

Сумма всех чисел (от 1 до 36) равна $\frac{36 \cdot 37}{2} = \frac{1332}{2} = 666$. Предположим, что у нас удалось расставить числа так, чтобы суммы по горизонтали и по вертикали в каком-то порядке составили арифметическую прогрессию (т.е. были последовательными). Тогда сумма всех этих ~~чисел~~ сумм будет являться суммой арифметической прогрессии, т.е. их сумма $S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, где $d = 1$ (числа последовательные), $n = 12$ (т.к. всего 12 чисел),

a_1 - наименьшая сумма по вертикали или горизонтали. Тогда

$S = \frac{2a_1 + \overset{11 \cdot 1}{\cancel{11}}}{2} \cdot 12 = 6(2a_1 + 11)$. Посчитав сумму прогрессии мы получим удвоенную сумму всех чисел, и вправду, сумма всех сумм по горизонтали является суммой ~~всех~~ чисел и по вертикали тоже сумма всех чисел от 1 до 36 в таблице.

Значит, $S = 666 \cdot 2 = 1332$.

$6(2a_1 + 11) = 1332$

$2a_1 + 11 = 222$

$2a_1 = 211$

$a_1 = 105{,}5$. $a_1 \notin \mathbb{Z}$

Т.е. сумма чисел в какой-то строчке или в каком-то столбце равна 105,5. Значит наше предположение неверное, т.к. в таблице находятся только целые числа от 1 до 36 => их сумма не может являться нецелым числом. Значит так расставить числа нельзя.

Ответ: нет

+

Задание 4.

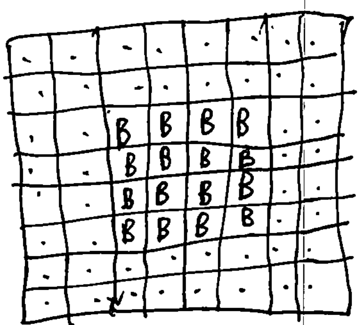
A	B	C	D	A	B	C	D
E	F	G	H	E	F	G	H
C	D	A	B	C	D	A	B
G	H	E	F	G	H	E	F
A	B	C	D	A	B	C	D
E	F	G	H	E	F	G	H
C	D	A	B	C	D	A	B
G	H	E	F	G	H	E	F

~~Заметим, что если взять~~

Раскрасим доску цветами A, B, C, D, E, F, H, G, как показано на рисунке. ~~(Заметим, что когда мы~~ находимся в клетки цвета ~~можем бить клетки г)~~

(~~Заметим~~ Так, что когда мы находимся в клетке какого-то цвета, то мы можем бить только клетки этого же цвета). Т.е. находясь в клетке цвета A мы бьём только цвет A. Заметим, что каждого цвета получилось 8 клеток. Т.к. 1 вампир бьет лишь 5 клеток, нам нужно хотя бы 2 вампира на 8 клеток (на каждый цвет), значит, что на все цвета нам нужно $8 \cdot 2 = 16$ вампиров т.к. на каждый цвет 2 вампира, т.к. вампиры при такой раскраске бьют лишь один цвет. Т.е. мы получим оценку на 16 вампиров. Вот пример:

+



Ответ: 16 вампиров (см. рисунок).

Бланк ответов

Задание 2.

Докажем, что соблюдается неравенство ①:

① $a_i^2 \geq 2a_i - 1$.

$a_i^2 - 2a_i + 1 \geq 0$.

$(a_i + 1)^2 \geq 0$. Что всегда выполняется, т.к. квадрат действительного числа неотрицателен.

Тогда предположим, что нет такого i, при котором $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$. Тогда $a_i^2 < 2a_{i+1} - 1$. В свою очередь, $2a_{i+1} - 1 \leq a_{i+1}^2$, из доказанного нами ~~утверждения~~ неравенства ①. Из этого следует, что для любого $i \in [1; 2022]$ $(a_i^2 < 2a_{i+1} - 1 \leq a_{i+1}^2)$ $a_i^2 < a_{i+1}^2$. Значит $a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \ldots < a_{2022}^2 < a_{2023}^2$. Но по условию $a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1$. Т.е. $a_1^2 < a_{2023}^2$ и $a_{2023}^2 \leq 2a_1 - 1$, тогда $a_1^2 < 2a_1 - 1$, что противоречит неравенству ①. Значит, наше предположение неверное $\Rightarrow$ существует такое i от 1 до 2022, что $a_i^2 \geq 2a_{i+1} - 1$.

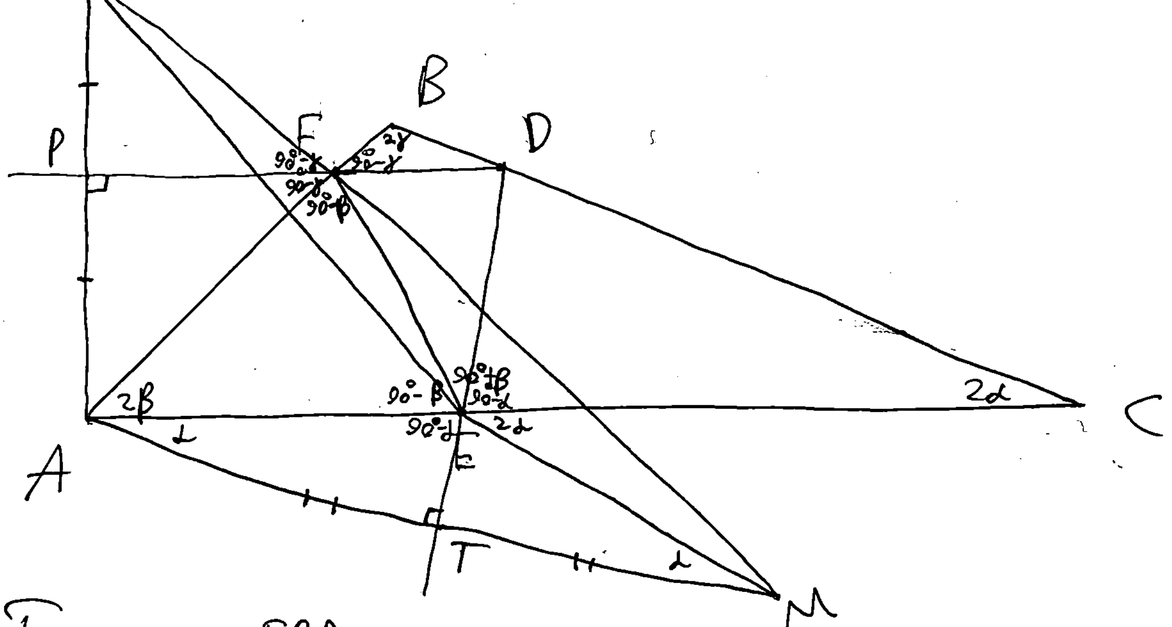
+

ч.т.д.

Ответ: доказано.

2

Задание 3.



Пусть $\angle FBD = 2\gamma$, $\angle DCE = 2\alpha$, $\angle BAC = 2\beta$. Тогда $2\gamma + 2\alpha + 2\beta = 180°$ (1).
$AF = AE$, $BF = BD$, $DC = CE$ (т.к. D, F, E – точки касания, а отрезки касательных равны).
Тогда $\triangle BDF$, $\triangle DEC$, $\triangle AEF$ – равнобедренные по опр.:
$\angle BDF = \angle BFD = \frac{180° - \angle FBD}{2} = 90° - \gamma$. $\angle CDE = \angle CED = \frac{180° - \angle DCE}{2} = 90° - \alpha$.
$\angle AFE = \angle AEF = \frac{180° - \angle FAE}{2} = 90° - \beta$

Т.к. N симметрично A относительно FD, то $\angle APF = \angle NPF = 90°$, а $NP = PA$, аналогично $AT = TM$, $\angle ATE = \angle ETM$. Тогда $\triangle PFA = \triangle PFN$ по двум катетам (PF-общ, $NP = AP$) и $\angle NFP = \angle PFA$. Значит, $NF = AF$. Аналогично $\triangle ETA = \triangle ETM$ по двум катетам (ET-общ, $AT = TM$) и $\angle AET = \angle TEM$. Значит, $AE = EM$. $AF = AE$ (отр. кас. равны) $\Rightarrow NF = EM = AF = AE$.
$\angle NFP = \angle PFA = \angle BFD = 90° - \gamma$ (верт. углы). $\angle DEC = \angle AET = 90° - \alpha$ (верт. углы). $\angle AET = \angle TEM = 90° - \alpha$. Тогда $\angle EAT = \alpha$, $\angle EMT = \alpha$, $\angle CEM = \angle EAM + \angle EMA = 2\alpha$ (внешний угол)
$\angle FEC = 180° - \angle AEF = 90° + \beta$. Тогда $\angle FEM = \angle FEC + \angle MEC = 90° + \beta + 2\alpha$,
$\angle NFE = \angle NFP + \angle PFA + \angle AFE = 270° - 2\gamma - \beta$. ~~Тогда~~ Докажем: $\angle FEM = \angle NFE$:
$90° + \beta + 2\alpha = 270° - 2\gamma - \beta$.
$2\beta + 2\alpha + 2\gamma = 180°$ – утверждение (1). Значит $\angle FEM = \angle NFE$.
Значит, накрест лежащие углы при прямых NF и EM и секущей FE равны $\Rightarrow NF \parallel EM$.
Значит, $NF \parallel EM$ и $NF = EM \Rightarrow MENF$ – пар-м (по пр-ку: если противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то это параллелограмм).
ч.т.д.

Ответ: доказано.