ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101440106780

Титульный лист

Направление [ ] информатика [ ] история [x] математика [ ] обществознание [ ] русский язык [ ] физика [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия ГРЕКОВ

Имя ДМИТРИЙ

Отчество ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 08 08 2006

Город участия КУРГАН

Аудитория 401

Телефон 89125787786

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101440106780

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия КУРГАН

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	3	20	20					
Балл члена жюри №2	20	20	3	20	20					

Итоговый балл 83

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№ 1

Пусть минимальная из сумм по горизонталям/вертикалям равна x. Тогда сумма всех сумм $= x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+11) = 12x+\frac{(11+1)\cdot 11}{2} = 12x+66$

Очевидно, что во всех 12 суммах мы посчитаем каждое число дважды: 1 раз по вертикали и ещё 1 по горизонтали.

Найдем сумму всех чисел таблицы: $\frac{(1+36)\cdot 36}{2} = 37\cdot 18 = 666$

Тогда из сказанного выше следует, что
$$12x+66 = 666\cdot 2$$
$$12x = 1332-66 = 1266$$
$$x = \frac{1266}{12} = \frac{211}{2} \notin \mathbb{N}$$

Значит x не натуральный, хотя является суммой натуральных чисел $\Rightarrow$ такого быть не может.

+

Ответ: нельзя

№ 2

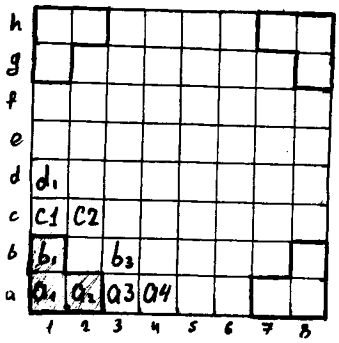
$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = a\sqrt{(1-b^2-c^2)+b^2c^2} + b\sqrt{(1-a^2-c^2)+a^2c^2} +$$
$$+ c\sqrt{(1-a^2-b^2)+a^2b^2} = a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2} + b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2} + c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2} =$$
$$= a\sqrt{(a+bc)^2} + b\sqrt{(b+ac)^2} + c\sqrt{(c+ab)^2} = a(a+bc) + b(b+ac) + c(c+ab) =$$
$$= a^2+abc+b^2+abc+c^2+abc = (a^2+b^2+c^2+2abc)+abc = 1+abc$$

По неравенству о средних $1+abc \geqslant 2\sqrt{1\cdot abc} = 2\sqrt{abc}$

Что и требовалось доказать.

+

№ 4



Давайте возьмём и рассмотрим какие-то 3 угловые клетки. Пусть это будет нижний левый угол. Поймём, что клетку $a1$ можно побить только из клеток $a1, a3, c1$. Клетку b_1 только из d_1, b_1, b_3. Но а клетку $a2$ только из a_2, c_2, a_4.

Очевидно, что поставив фигуру оборотня в любую из отмеченных клеток, она сможет бить не более 4 клеток доски (т.к. хотя бы 1 из клеток, которые она бьёт находится за пределами нашей доски). Также заметим, что ни одна из клеток не задевает клетки других уголков.

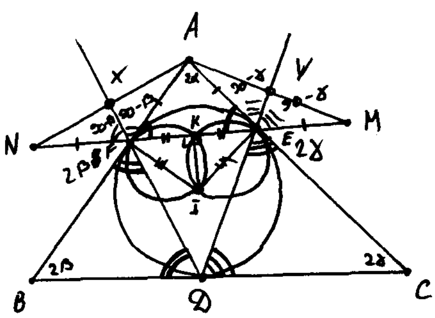
Тогда мы понимаем, что можно проделать аналогичные рассуждения для оставшихся углов, а значит, чтобы побить каждый уголков нам понадобится по 3 оборотня на угол, каждый из которых бьёт не более 4 клеток => эти $3 \cdot 4 = 12$ фигур побьют $\leq 12 \cdot 4 = 48$ клеток => останется не менее $64 - 48 = 16$ клеток, но а чтобы побить их потребуется хотя бы $\lceil \frac{16}{5} \rceil = \lceil 3{,}2 \rceil = 4$ оборотня. Значит всего потребуется не менее $12 + 4 = 16$ фигур оборотней.

Пример на 16 фигур:

x	x	O	x	x	O	x	x
x	x	x	O	O	x	x	x
x	O	x	x	x	x	O	x
O	x	x	x	x	x	x	O
O	x	x	x	x	x	x	O
x	O	x	x	x	x	O	x
x	x	x	O	O	x	x	x
x	x	O	x	x	O	x	x

Ответ: 16

№ 5



1) Т.к. FI и IE диаметры в окружностях, а K – точка пересечения, то $\angle FKI = 90°$ и $\angle IKE = 90°$ $\Rightarrow$ $\angle FKE = \angle FKI + \angle EKI = 90 + 90 = 180$ $\Rightarrow$ F, K, E лежат на 1 прямой

2) Обозначим угол A за 2α, угол B за 2β, а угол C за 2γ.

3) Тогда $\angle BFD = \angle BDF = 90 - \beta$; $\angle CDE = \angle CED = 90 - \gamma$; $\angle AFE = \angle AEF = 90 - \alpha$

4) Заметим, что A, K, I также на 1 прямой, т.к. $AI \perp FE$ и $IK \perp FE$.

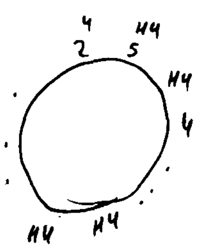
5) $\angle XFA = 90 - \beta \Rightarrow \angle NFX = 90 - \beta$ (т.к. сим.) $\Rightarrow \angle NFD = 180 - (180 - 2\beta) = 2\beta$ $\Rightarrow NF \parallel BD$. Аналогично для EM и DC

6). Значит $NF = EM$ и $NF \parallel EM \Rightarrow NEMF$ – параллелограм $\Rightarrow$ NM и FE делятся точкой пересечения пополам, но середина FE – K $\Rightarrow K \in NM$. (K – середина FE, т.к. FIE – р/б и IK – высота)

Что и требовалось доказать

+

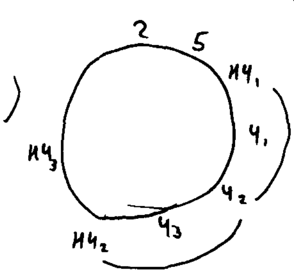
№ 3



Поймём, что если есть нечётное число, то 1 его сосед – чётный, а другой – нечётный, т.к. иначе разность чётная!

Тогда рассмотрим несколько случаев, как можно разместить оставшиеся 2 чётных числа.

1)

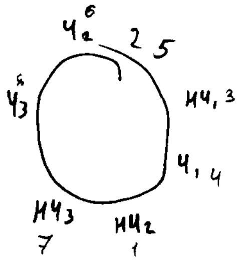


В первом случае оба чётных справа.
почему только 1?

Тогда $|НЧ_2 - Ч_2| = НЧ_{22}$, $Ч_3 \vdots НЧ_{22} \Rightarrow НЧ_{22} = 1$
$|НЧ_1 - Ч_2| = НЧ_{12}$, $Ч_1 \vdots НЧ_{12} \Rightarrow НЧ_{12} = 1$
$\Rightarrow Ч_2 \neq 8$, т.к. тогда $\{НЧ_1; НЧ_2\} = \{7; 9\}$, но 9 – нет.

$\Rightarrow Ч_2 = 4$ или 6 $\Rightarrow$ второе число или $Ч_1$ или $Ч_3$ $\Rightarrow$ они соседи.

2)

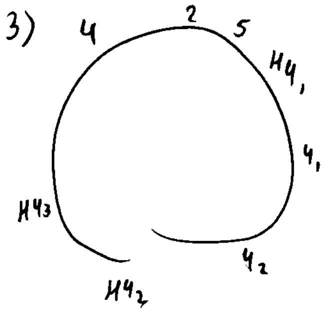


Во втором случае оба чётных слева. Мы можем провести аналогичные с прошлым случаем рассуждения и понять, что $Ч_2 \neq 8$. Если 8 слева, то это $Ч_3 \Rightarrow Ч_2 \vdots |8-2| \Rightarrow Ч_2 \vdots 6 \Rightarrow Ч_2 = 6 \Rightarrow Ч_1 = 4$

Но $8 \vdots |6 - НЧ_3| \Rightarrow НЧ_3 = 7$. Тогда $7 \vdots 8 - НЧ_2 \Rightarrow НЧ_2 = 1 \Rightarrow НЧ_1 = 3, Ч_1 = 4$

Значит: $1 \vdots (7-4) = 3$, но это неправда $\Rightarrow$ 8 справа, а значит $Ч$ и 6 – соседи

3)



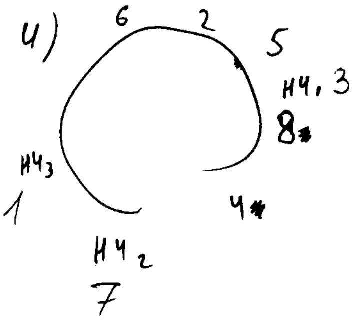
Здесь 1 четное слева, а другое справа и левое = 4.

Тогда $\text{Ч}_1, \text{Ч}_2 = (6; 8)$.

$6 : |8 - \text{НЧ}| \Rightarrow \text{НЧ} = \underset{\text{зан.}}{5}$ или 7 ; $8 : |6 - \text{НЧ}| \Rightarrow \text{НЧ} = 5$ или 7

Значит $\text{НЧ}_1 = \text{НЧ}_2 = 7$, но такого быть не может
Случай невозможен

4)



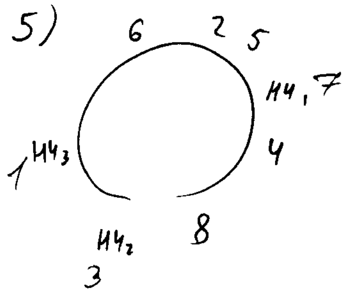
Тоже самое только слева 6. Фиксируем 4, 8.

Тогда $\text{НЧ}_1 = 3$; $\text{НЧ}_2 = 7 \Rightarrow \text{НЧ}_3 = 1$

Значит $\text{НЧ}_2 = 7 \vdots\ 4 - \text{НЧ}_3 = 4 - 1 = 3$

Противоречие => случай невозможен.

5)



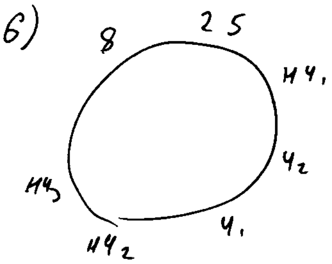
Меняем местами 4, 8 по сравнению с прошлым.

Тогда $\text{НЧ}_1 = 7$; $\text{НЧ}_2 = 3 \Rightarrow \text{НЧ}_3 = 1$

Значит $\text{НЧ}_2 = 3 \vdots\ |8 - \text{НЧ}_3| = 8 - 1 = 7$

Противоречие => случай невозможен

6)



Данный случай сразу удовлетворяет условию, т.к. $(\text{Ч}_1, \text{Ч}_2) = (4, 6) \Rightarrow$ они соседи.

Таким образом мы разобрали все случаи и во всех работающих случаях 6 и 4 — соседи. Что и требовалось доказать.

перебор неполный
есть идея чёткости —